O grupach lokalnie stopniowych

Beata Bajorska (Gliwice)

Grupę nazywa się **nilpotentną klasy** n jeśli spełnia tożsamość $[x_1, ..., x_{n+1}] = 1$.
Grupę nazywa się n**-Engelowską** jeśli spełnia tożsamość $[x, \underbrace{y, y, ..., y}_{n}] = 1$.

Niech $\mu_1(x, y) := xy,\ \nu_1(x, y) := yx$ oraz dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$:

$$\mu_{n+1}(x, y, z_1, ..., z_n) := \mu_n(x, y, z_1, ..., z_{n-1}) z_n \nu_n(x, y, z_1, ..., z_{n-1}),$$

$$\nu_{n+1}(x, y, z_1, ..., z_n) := \nu_n(x, y, z_1, ..., z_{n-1}) z_n \mu_n(x, y, z_1, ..., z_{n-1})$$

B.H.Neumann i T.Taylor udowodnili, że grupa jest nilpotentna klasy n wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia tożsamość $\mu_n(x, y, z_1, ..., z_{n-1}) = \nu_n(x, y, z_1, ..., z_{n-1})$.

A.I.Shirshov pokazał, że istnieją tożsamości półgrupowe, które określają grupy 2- i 3-Engelowskie. D.M.Riley uogólnił te tożsamości, definiując tzw. grupy **pozytywnie** n**-Engelowskie** (ang. *positively* n*-Engel*), tzn. takie, które spełniają następujące dwie tożsamości:

$$\mu_n(x, y, \underbrace{1, 1, ..., 1}_{n-1}) = \nu_n(x, y, \underbrace{1, 1, ..., 1}_{n-1}),$$

$$\mu_n(x, y, 1, xy, (xy)^2, ..., (xy)^{n-2}) = \nu_n(x, y, 1, xy, (xy)^2, ..., (xy)^{n-2}).$$

Grupę nazywa się **lokalnie stopniową** (ang. *locally graded*), jeśli każda jej nietrywialna skończenie generowana podgrupa posiada właściwą podgrupę normalną skończonego indeksu.

Zostaną omówione odpowiedzi na następujące 4 pytania:

P1 Czy każda skończenie generowana grupa n-Engelowska jest nilpotentna?

P2 Czy istnieje skończenie generowana nieskończona prosta grupa n-Engelowska?

P3 Czy rozmaitości n-Engelowskie są określone przez tożsamości półgrupowe?

P4 Czy każda skończenie generowana grupa pozytywnie n-Engelowska jest nilpotentna?

Wszystkie te problemy są otwarte, ale znane są ich rozwiązania w klasie grup lokalnie stopniowych.