O PEWNEJ KLASIE U.P.-MONOIDÓW

RYSZARD MAZUREK (BIAŁYSTOK)

Monoid S nazywamy u.p.-monoidem (*unique product monoid*), jeżeli dla dowolnych niepustych i skończonych podzbiorów A, B zbioru S istnieje element $s \in AB$, który tylko na jeden sposób może być zapisany w postaci $s = ab$, gdzie $a \in A$ i $b \in B$. Takie monoidy grają ważną rolę w badaniach pierścieni grupowych i półgrupowych ([2], [5]).

Celem referatu jest przedstawienie pewnej klasy u.p.-monoidów, która w sposób naturalny pojawiła się w trakcie badania skośnych uogólnionych szeregów potęgowych. Aby zdefiniować tę klasę monoidów i wyjaśnić, czym są skośne uogólnione szeregi potęgowe, potrzebujemy definicji monoidów uporządkowanych oraz zbiorów artinowskich i wąskich.

Parę $(S, \leq)$, złożoną z monoidu S i częściowego porządku $\leq$ w zbiorze S, nazywamy monoidem uporządkowanym, jeżeli z nierówności $x \leq y$ wynikają nierówności $sx \leq sy$ i $xs \leq ys$ (dla dowolnych $x, y, s \in S$). Jeżeli z ostrej nierówności $x < y$ wynikają ostre nierówności $sx < sy$ i $xs < ys$, to parę $(S, \leq)$ nazywamy monoidem ściśle uporządkowanym.

Częściowo uporządkowany zbiór T nazywamy:

- artinowskim (*artinian*), jeżeli każdy ściśle malejący ciąg elementów zbioru T jest skończony;
- wąskim (*narrow*), jeżeli każdy podzbiór zbioru T złożony z elementów parami nieporównywalnych jest skończony.

Konstrukcja skośnych uogólnionych szeregów potęgowych została opisana w pracy [4]. Składnikami wykorzystywanymi w tej konstrukcji są: pierścień R, ściśle uporządkowany monoid $(S, \leq)$ oraz homomorfizm monoidów $\omega : S \to \mathrm{End}(R)$. Elementami pierścienia skośnych uogólnionych szeregów potęgowych $R[[S, \omega]]$ są wszystkie funkcje $f : S \to R$, których nośnik $\mathrm{supp}(f) = \{s \in S \mid f(s) \neq 0\}$ jest artinowski i wąski; takie funkcje dodaje się „po wartościach" i mnoży się „splotowo" z wykorzystaniem homomorfizmu ω. Szczególnymi przypadkami tej konstrukcji są pierścienie: wielomianów $R[x]$, szeregów potęgowych $R[[x]]$, szeregów Laurenta $R((x))$, półgrupowe $R[S]$, Malceva-Neumanna $R((S))$ oraz skośne wersje takich pierścieni.

Uporządkowany monoid $(S, \leq)$ nazywamy a.n.u.p.-monoidem (*artinian narrow unique product monoid*), jeżeli dla dowolnych niepustych, artinowskich i wąskich podzbiorów A, B zbioru S istnieje element $s \in AB$, który tylko na jeden sposób może być zapisany w postaci $s = ab$, gdzie $a \in A$ i $b \in B$.

Jak widać, zbiory artinowskie i wąskie pełnią w definicji a.n.u.p.-monoidu taką samą funkcję jak zbiory skończone w definicji u.p.-monoidu. Ponieważ zbiory skończone są artinowskie i wąskie, więc każdy a.n.u.p.-monoid jest u.p.-monoidem.

Celem referatu jest zaprezentowanie metod konstruowania a.n.u.p.-monoidów oraz przedstawienie, pochodzącego z pracy [3], przykładu u.p.-monoidu, który nie jest a.n.u.p.-monoidem. Ponadto w trakcie referatu podana będzie charakteryzacja zredukowanych pierścieni skośnych uogólnionych szeregów potęgowych $R[[S, \omega]]$ o wykładnikach z a.n.u.p.-monoidu $(S, \leq)$, uogólniajaca znaną charakteryzację zredukowanych pierścieni skośnych wielomianów, otrzymaną w pracy [1].

Prezentowane wyniki zostały uzyskane wspólnie z Gregiem Marksem i Michałem Ziembowskim.

Literatura

[1] J. Krempa, *Some examples of reduced rings,* Algebra Colloq. 3 (1996), 289–300.

[2] J. Krempa, Z. Marciniak, *Pierścienie grupowe,* Wiadomości Matematyczne 28 (1990), 137–148.

[3] G. Marks, R. Mazurek, M. Ziembowski, *A new class of unique product monoids with applications to ring theory,* Semigroup Forum, praca przyjęta do druku.

[4] R. Mazurek, M. Ziembowski, *On von Neumann regular rings of skew generalized power series,* Comm. Algebra, praca przyjęta do druku.

[5] J. Okniński, *Semigroup algebras,* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 138, Marcel Dekker, Inc., New York, 1991.

Katedra Informatyki Teoretycznej
Wydział Informatyki
Politechnika Białostocka
ul. Wiejska 45A, 15-351 Białystok
e-mail: mazurek@pb.bialystok.pl