O pewnych funkcjach inkluzji przybliżonej

Streszczenie

Anna Gomolińska

Uniwersytet w Białymstoku, Instytut Matematyki
ul. Akademicka 2, 15267 Białystok

W ogólnym ujęciu, funkcje inkluzji przybliżonej są to pewne funkcje, za pomocą których można mierzyć, w jakim stopniu zbiory zawarte są w zbiorach. Formalne pojęcie inkluzji przybliżonej zostało określone aksjomatycznie przez Polkowskiego i Skowrona w ramach teorii „bycia częścią całości w stopniu” zwanej mereologią przybliżoną [12, 13]. Mereologia przybliżona jest rozszerzeniem mereologii Leśniewskiego [5, 18].

Niech U będzie niepustym zbiorem obiektów (uniwersum). Zbiór potęgowy dowolnego zbioru X oznaczamy przez $\wp X$, natomiast moc X przez $\#X$. Z aksjomatów podanych przez Polkowskiego i Skowrona można wywnioskować, że przez funkcję inkluzji przybliżonej nad U można rozumieć dowolną funkcję $\kappa : \wp U \times \wp U \mapsto [0, 1]$ spełniającą następujące warunki:

$$\begin{aligned}&(\mathrm{RIF}-1)\ \forall X, Y \subseteq U.(\kappa(X, Y) = 1 \ \Leftrightarrow\ X \subseteq Y),\\&(\mathrm{RIF}-2)\ \forall X, Y, Z \subseteq U.(Y \subseteq Z \ \Rightarrow\ \kappa(X, Y) \leqslant \kappa(X, Z)).\end{aligned} \tag{1}$$

Zatem funkcje inkluzji przybliżonej są to funkcje, które dowolnej parze podzbiorów pewnego uniwersum przypisują liczby z przedziału $[0, 1]$, mające wyrażać stopień zawierania pierwszego zbioru w drugim. Funkcje te realizują ideę rozszerzenia pojęcia inkluzji zbiorów do pojęcia inkluzji w stopniu. Stopień inkluzji zbioru X w zbiorze Y jest najwyższy, tj. wynosi 1 dokładnie wtedy, gdy X jest zawarty w Y (RIF-1). Ponadto funkcje inkluzji przybliżonej są monotoniczne względem drugiego argumentu (RIF-2).

Nie ma zbyt wielkiej przesady w stwierdzeniu, że standardowa funkcja inkluzji przybliżonej, określona poniżej, jest jedyną naprawdę znaną i używaną funkcją inkluzji przybliżonej. Standardową funkcję inkluzji przybliżonej nad pewnym niepustym skończonym U można zdefiniować jako funkcję $\kappa^{\pounds} : \wp U \times \wp U \mapsto [0, 1]$, taką że dla dowolnych $X, Y \subseteq U$,

$$\kappa^{\pounds}(X, Y) = \begin{cases} \frac{\#(X \cap Y)}{\#X} & \text{jeśli } \ X \neq \emptyset, \\ 1 & \text{w p.p.} \end{cases} \tag{2}$$

Pojęcie standardowej funkcji inkluzji przybliżonej jest więc blisko związane z pojęciem prawdopodobieństwa warunkowego. Pomysł zawarty w (2) był wykorzystywany już przez Łukasiewicza [1, 6] w badaniach dotyczących prawdopodobieństwa, że wyrażenia logiczne, w tym formuły implikatywne są prawdziwe.

W klasycznym modelu zbiorów przybliżonych, zaproponowanym przez Pawlaka [8–10], funkcje inkluzji przybliżonej nie są konieczne do zdefiniowania przybliżeń zbiorów. Funkcje te są natomiast podstawowym składnikiem parametrycznych przestrzeni przybliżeń zdefiniowanych przez Skowrona i Stepaniuka [15, 16].

Standardowa funkcja inkluzji przybliżonej jest też użyta w zmienno-precyzyjnym modelu zbiorów przybliżonych zaproponowanym przez Ziarko [19, 20]. Jeszcze innym zastosowaniem jest użycie funkcji inkluzji przybliżonej do zdefiniowania funkcji przybliżonego należenia [11]. Funkcje inkluzji przybliżonej można też użyć – bezpośrednio lub pośrednio – do mierzenia stopnia podobieństwa (i bliskości) zbioru do zbioru.

W tym referacie przedstawię dwie funkcje inkluzji przybliżonej nad U, inne niż standardowa, jednak mające podobne korzenie. Jedna z nich okaże się funkcją opisaną w [2], lecz bez podania własności, druga jest prawdopodobnie nowa. Następnie wprowadzone zostanie pojęcie funkcji dopełniającej do funkcji inkluzji przybliżonej. Funkcje dopełniające można użyć do zdefiniowania pewnych metryk na $\wp U \times \wp U$ mierzących odległość między zbiorami, więc też stopień niepodobieństwa zbioru do zbioru. Jedna z otrzymanych funkcji odległości okaże się metryką Marczewskiego–Steinhausa [7]. Funkcje dopełniające do rozważanych metryk są znane z literatury [3, 4, 14, 17] i używane do oszacowania stopnia podobieństwa zbioru do zbioru.

Zaczynając więc od pewnych spokrewnionych ze sobą funkcji inkluzji przybliżonej, dla których naturalną dziedziną zastosowania są zbiory przybliżone, otrzymamy indeksy podobieństwa zbiorów dobrze znane w analizie danych.

Literatura

1. L. Borkowski, editor. *Jan Łukasiewicz – Selected Works.* North Holland/Polish Scientific Publ., Amsterdam/Warsaw, 1970.
2. G. Drwal and A. Mrózek. System RClass – software implementation of a rough classifier. In M. A. Kłopotek, M. Michalewicz, and Z. W. Raś, editors, *Proc. 7th Int. Symp. Intelligent Information Systems (IIS'1998), Malbork, Poland, June 1998*, pages 392–395, 1998.
3. P. Jaccard. Nouvelles recherches sur la distribution florale. *Bull. de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles*, 44:223–270, 1908.
4. S. Kulczyński. Die Pflanzenassociationen der Pieninen. *Bull. Internat. Acad. Polon. Sci. Lett., Sci. Math. et Naturelles, serie B, suppl. II*, 2:57–203, 1927.
5. S. Leśniewski. *Podstawy ogólnej teorii mnogości 1*, volume 2 of *Prace Polskiego Koła Naukowego.* Moskwa, 1916. See also [18], pages 128–173.
6. J. Łukasiewicz. *Die logischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Kraków, 1913. English translation in [1], pages 16–63.
7. E. Marczewski and H. Steinhaus. On a certain distance of sets and the corresponding distance of functions. *Colloquium Mathematicum*, 6:319–327, 1958.
8. Z. Pawlak. Rough sets. *Int. J. Computer and Information Sciences*, 11:341–356, 1982.
9. Z. Pawlak. *Systemy informacyjne. Podstawy teoretyczne.* Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1983.
10. Z. Pawlak. *Rough Sets. Theoretical Aspects of Reasoning About Data.* Kluwer, Dordrecht, 1991.
11. Z. Pawlak and A. Skowron. Rough membership functions. In M. Fedrizzi, J. Kacprzyk, and R. R. Yager, editors, *Advances in the Dempster–Shafer Theory of Evidence*, pages 251–271. John Wiley & Sons, New York, 1994.

12. L. Polkowski and A. Skowron. Rough mereology. *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, 869:85–94, 1994.
13. L. Polkowski and A. Skowron. Rough mereology: A new paradigm for approximate reasoning. *Int. J. Approximated Reasoning*, 15(4):333–365, 1996.
14. W. Rand. Objective criteria for the evaluation of clustering methods. *J. of the American Statistical Association*, 66:846–850, 1971.
15. A. Skowron and J. Stepaniuk. Generalized approximation spaces. In T. Y. Lin and A. M. Wildberger, editors, *Soft Computing*, pages 18–21. Simulation Councils, San Diego, CA, 1995.
16. A. Skowron and J. Stepaniuk. Tolerance approximation spaces. *Fundamenta Informaticae*, 27(2–3):245–253, 1996.
17. R. R. Sokal and C. D. Michener. A statistical method for evaluating systematic relationships. *University of Kansas Science Bulletin*, 38:1409–1438, 1958.
18. S. J. Surma, J. T. Srzednicki, and J. D. Barnett, editors. *Stanisław Leśniewski Collected Works*. Kluwer/Polish Scientific Publ., Dordrecht/Warsaw, 1992.
19. W. Ziarko. Variable precision rough set model. *J. Computer and System Sciences*, 46(1):39–59, 1993.
20. W. Ziarko. Probabilistic decision tables in the variable precision rough set model. *Computational Intelligence*, 17(3):593–603, 2001.