O grupach lokalnie stopniowych

Beata Bajorska, Gliwice

Na podstawie wspólnego artykułu z O.Macedońską "On locally graded n-Engel and positively n-Engel groups", przyjętego do druku w Publicationes Mathematicae Debrecen

Grupę nazywa się **nilpotentną klasy** n jeśli spełnia tożsamość $[x_1, \ldots, x_{n+1}] = 1$. A.I.Malcew w 1953 i niezależnie B.H.Neumann & T.Taylor w 1963 udowodnili, że grupa nilpotentna może być określona przez tożsamość półgrupową.

Dokładniej: niech $\mu_1(x, y) := xy,\ \nu_1(x, y) := yx$ oraz dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$:

$$\mu_{n+1}(x, y, z_1, \ldots, z_n) := \mu_n(x, y, z_1, \ldots, z_{n-1}) z_n \nu_n(x, y, z_1, \ldots, z_{n-1}),$$

$$\nu_{n+1}(x, y, z_1, \ldots, z_n) := \nu_n(x, y, z_1, \ldots, z_{n-1}) z_n \mu_n(x, y, z_1, \ldots, z_{n-1})$$

(N&T) Grupa jest nilpotentna klasy n wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia tożsamość

$$\mu_n(x, y, z_1, \ldots, z_{n-1}) = \nu_n(x, y, z_1, \ldots, z_{n-1})$$

Grupę nazywa się n**-Engelowską** jeśli spełnia tożsamość $[x, \underbrace{y, y, \ldots, y}_{n}] = 1$.

Grupę nazywa się **lokalnie stopniową** (ang. *locally graded*), jeśli każda jej nietrywialna skończenie generowana podgrupa posiada właściwą podgrupę (normalną) skończonego indeksu.

Grupy lokalnie stopniowe zostały zdefiniowane w 1970 przez S.N.Czernikowa. Ograniczanie problemów do klasy grup lokalnie stopniowych pozwala uniknąć rozpatrywania grup, które wymykają się intuicji - takich jak nieskończone grupy Burnside'a czy monstra Tarskiego-Olszańskiego.

Klasa grup lokalnie stopniowych ma wszystkie "porządne" własności: zawiera grupy rozwiązalne, lokalnie skończone i rezydualnie skończone. Jest zamknięta ze względu na branie podgrup i rozszerzeń. Jest również lokalnie i rezydualnie zamknięta, tzn. jeśli grupa jest lokalnie-(lokalnie stopniowa) lub rezydualnie-(lokalnie stopniowa), to jest lokalnie stopniowa.

W klasie grup lokalnie stopniowych zostało rozwiązanych wiele problemów, które w ogólności pozostają otwarte. Omówimy cztery z nich.

P1 Czy to prawda, że każda grupa n-Engelowska jest lokalnie nilpotentna? (inaczej mówiąc: Czy to prawda, że każda skończenie generowana grupa n-Engelowska jest nilpotentna?)

P2 Czy to prawda, że nie istnieje skończenie generowana nieskończona prosta grupa n-Engelowska?

Stwierdzenie. Problemy P1 i P2 są równoważne.

Uwaga. W 1936 M.Zorn pokazał, że skończone grupy n-Engelowskie są nilpotentne. Ponadto, istnieją przykłady grup 3- i 4-Engelowskich, które nie są nilpotentne, m.in. K.W.Gruenberg 1959; S.Bachmuth & H.Y.Mochizuki 1971; Yu.P.Razmyslov 1971, jednak wszystkie one są nieskończenie generowane.

Są dwa główne podejścia do problemu **P1**:

(I) Rozpatrywanie grup n-Engelowskich dla różnych n.

Do tej pory udało się zweryfikować hipotezę **P1** (a więc i **P2**) dla $n = 2$ (F.W.Levi 1942), $n = 3$ (H.Heineken 1961) oraz dla $n = 4$ (G.Havas & M.R.Vaughan-Lee 2005).

(II) Rozpatrywanie problemu w pewnych klasach grup.

Grupy n-Engelowskie są lokalnie nilpotentne jeśli dodatkowo są: rozwiązalne (K.W.Gruenberg 1953), rezydualnie skończone (J.S.Wilson 1991), proskończone (J.S.Wilson & E.I.Zelmanov 1992) lub zwarte (Ju.Medvedev 2003).

Najogólniejszą odpowiedź podali Y.K.Kim & A.H.Rhemtulla w 1994:

Każda lokalnie stopniowa grupa n-Engelowska jest lokalnie nilpotentna.

P3 Czy rozmaitość określona przez grupę n-Engelowską ma bazę złożoną z tożsamości półgrupowych? (inaczej mówiąc: Czy grupy n-Engelowskie są określone przez tożsamości półgrupowe?)

Pytanie postawił A.I.Szirszow w 1963 (Problem 2.82, The Kourovka Notebook).

Szirszow pokazał, że tożsamość $(xy)\cdot(yx) = (yx)\cdot(xy)$ określa grupę 2-Engelowską, a poniższe dwie niezależne tożsamości określają grupę 3-Engelowską:

$$(xy^2x)\cdot(yx^2y) = (yx^2y)\cdot(xy^2x), \quad \big(xy^2x\big)\cdot xy\cdot\big(yx^2y\big) = \big(yx^2y\big)\cdot xy\cdot\big(xy^2x\big)$$

co oznacza pozytywną odpowiedź na pytanie **P3** dla $n = 2, 3$

Odpowiedź pozytywną dla grup 4-Engelowskich podał G.Traustason w 1999.

Stwierdzenie. Rozmaitość określona przez lokalnie stopniową grupę n-Engelowską ma bazę złożoną z tożsamości półgrupowych.

P4 Czy każda skończenie generowana grupa pozytywnie n-Engelowska jest nilpotentna?

Zauważmy, że tożsamości wyznaczone przez Szirszowa są postaci $\mu_2(x,y,1) = \nu_2(x,y,1)$ (dla grupy 2-Engelowskiej) oraz $\mu_3(x,y,1,1)=\nu_3(x,y,1,1)$, $\mu_3(x,y,1,xy)=\nu_3(x,y,1,xy)$ (dla grupy 3-Engelowskiej). D.M.Riley, uogólniając te tożsamości, zdefiniował w 2001 grupy **pozytywnie n-Engelowskie** (ang. *positively n-Engel*), tzn. takie, które spełniają poniższe dwie tożsamości:

$$\mu_n(x,y,\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n-1})=\nu_n(x,y,\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n-1}),$$

$$\mu_n(x,y,1,xy,(xy)^2,\ldots,(xy)^{n-2})=\nu_n(x,y,1,xy,(xy)^2,\ldots,(xy)^{n-2}).$$

Riley udowodnił, że odpowiedź na pytanie **P4** jest pozytywna dla grup rezydualnie skończonych. Zauważył również, że można ją rozszerzyć do tzw. klasy $\mathcal{C}$, zdefiniowanej przez R.G.Burnsa, O.Macedońską & Ju.Medvedeva w 1997 (jeśli grupę nazwiemy SB, gdy leży w skończonym iloczynie rozmaitości, z których każda jest rozmaitością rozwiązalną lub ograniczoną rozmaitością Burnside'a, to klasa $\mathcal{C}$ składa się z grup lokalnie-rezydualnie-SB (BB 2006)).

Stwierdzenie. Klasa $\mathcal{C}$ jest właściwą podklasą klasy grup lokalnie stopniowych. (wynika z istnienia grup pośredniego wzrostu, które nie są rezydualnie skończone - konstrukcja A.Erschler 2004)

Twierdzenie. Każda skończenie generowana grupa lokalnie stopniowa pozytywnie n-Engelowska jest nilpotentna.

Stwierdzenie. Niech G będzie grupą lokalnie stopniową. Wtedy:
- G **jest pozytywnie m-Engelowska gdy jest n-Engelowska, gdzie** $n = n(m)$
- G **jest n-Engelowska gdy jest pozytywnie m-Engelowska, gdzie** $m = m(n)$