Skierowane liczby rozmyte w modelu Leontiewa

Dariusz Kacprzak

Politechnika Białostocka

Wydział Informatyki

Katedra Matematyki

dkacprzak@interia.pl

Model Leontiewa

Model Leontiewa, znany jest w literaturze pod nazwami: model przepływów międzygałęziowych, model "*input-output*", czy model nakładów i wyników.

Jego twórcą jest amerykański uczony Wassily Leontiew, który otrzymał nagrodę Nobla w dziedzinie ekonomii w 1973 roku za "*For the development of the input-output method and for its application to important economic problems*".

Możliwości modelu Leontiewa:

1. badanie stanu i struktury złożonych systemów gospodarczych,
2. określenie poziomu produkcji, aby uzyskać określony produkt końcowy,
3. określenie produktu końcowego możliwego do osiągnięcia przy danym poziomie produkcji.

Model Leontiewa - c.d.

Ponieważ analiza obejmuje zazwyczaj wiele gałęzi i ma dość skomplikowaną strukturę, więc aby uprościć zagadnienie, przyjmujemy pewne założenia:

1. poziom produkcji całkowitej (globalnej) każdej gałęzi jest uzależniony od wzajemnych powiązań w całej gospodarce,
2. każda gałąź wytwarza jeden produkt lub grupę produktów w stałych proporcjach i w tym celu zużywa jeden lub grupę produktow również w stałych proporcjach,
3. sektor gospodarstw domowych nie jest uwzględniony jako jedna z gałęzi gospodarki.

Model Leontiewa - c.d.

Załóżmy, że gospodarka składa się z n gałęzi produkcyjnych (sektorów czy działów pojedynczej firmy). Wprowadźmy następujące oznaczenia (wyrażone w jednostkach pieniężnych):

- $X_i, \ (i = 1, 2, ..., n) -$ wielkość produkcji całkowitej (globalnej) $i-$tej gałęzi,
- $x_{ij}, \ (i, j = 1, 2, ..., n) -$ cześć produkcji $i-$tej gałęzi, która jest zużywana (przepływa) na potrzeby produkcji gałęzi $j-$tej,
- $d_i, \ (i = 1, 2, ..., n) -$ produkt końcowy $i-$tej gałęzi (różnica między produkcją całkowitą $i-$tej gałęzi a jej przepływami do wszystkich gałęzi).

Model Leontiewa - c.d.

Punktem wyjścia modelu Leontiewa jest bilans gospodarczy w postaci tablicy przepływów międzygałęziowych przygotowany w sposób umożliwiający kwantyfikacje wzajemnych powiązań między wyodrębnionymi częściami systemu.

numer gałęzi		przepływy x_{ij} j 1	2	$\dots$	n	produkt końcowy d_i	produkcja całkowita X_i
	1	x_{11}	x_{12}	$\dots$	x_{1n}	d_1	X_1
i	2	x_{21}	x_{22}	$\dots$	x_{2n}	d_2	X_2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	n	x_{n1}	x_{n2}	$\dots$	x_{nn}	d_n	X_n

Model Leontiewa - c.d.

Ponieważ produkcja całkowita gałęzi $i-$tej, jest sumą przepływów międzygałęziowych oraz produktu końcowego, otrzymujemy układ równań bilansowych postaci:

$$\left\{\begin{array}{l} X_1 = x_{11} + x_{12} + ... + x_{1n} + d_1 \\ X_2 = x_{21} + x_{22} + ... + x_{2n} + d_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_n = x_{n1} + x_{n2} + ... + x_{nn} + d_n \end{array}\right. .$$

Na mocy założenia o stałych proporcjach zużywanej produkcji gałęzi $i-$tej przez gałąź $j-$tą możemy określić współczynniki kosztów należące do $[0, 1)$:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \quad (i, j = 1, 2, ..., n).$$

Pozwala to zapisać układ równań bilansowych w postaci:

$$\begin{cases} X_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n + d_1 \\ X_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n + d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n = a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \ldots + a_{nn}X_n + d_n \end{cases} .$$

To z kolei umożliwia przedstawienie układu równań bilansowych w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

lub w postaci skróconej:

$$X = AX + d.$$

Model Leontiewa - c.d.

Poszczególne elementy równania

$$X = AX + d$$

oznaczają:

- X – macierz (wektor) produkcji całkowitej (globalnej),
- A – macierz współczynników kosztów,
- d – macierz (wektor) produktu końcowego.

Powyższe równanie zapisujemy w postaci tzw. modelu Leontiewa (I oznacza macierz jednostkową stopnia n):

$$X - AX = d \iff (I - A)X = d.$$

Macierz $(I - A)$ nosi nazwę macierzy Leontiewa i przekształaca wektor produkcji całkowitej X w wektor produktu końcowego d.

Model Leontiewa - c.d.

Powstaje natychmiast pytanie czy znając wektor produktu końcowgo d możemy odwrócić sytuację i wyznaczyć wektor produkcji całkowitej X? Aby na nie odpowiedzieć wprowadźmy pojęcie macierzy produktywnej.

Definicja

Macierz A współczynników kosztów jest produktywna, jeżeli istnieje nieujemny wektor produkcji całkowitej X, taki że $X > AX$.

W realnej gospodarce możemy więc założyć, że macierz A jest produktywna. Aby odpowiedzieć na powyższe pytanie, zastosujemy dwa twierdzenia.

Model Leontiewa - c.d.

Twierdzenie

Jeżeli macierz A jest produktywna, to macierz Leontiewa $(I - A)$ jest macierzą nieosobliwą.

Z twierdzenia tego wynika bezpośrednio, że w realnej gospodarce produkt końcowy d wyznacza w sposób jednoznaczny produkcję całkowitą X zgodnie z regułą:

$$X = (I - A)^{-1} d.$$

Twierdzenie

Jeżeli macierz A jest produktywna, to wszystkie elementy macierzy $(I - A)^{-1}$ są nieujemne.

Dodatkowo z tego twierdzenia otrzymujemy, że dla dowolnego nieujmnego wektora produktu końcowego d otrzymamy również nieujemny wektor produkcji całkowitej X.

Model Leontiewa - c.d.

Zauważmy również, że model Leontiewa jest jednorodny i addytywny. Z addytywności otrzymujemy:

$$(I - A)\Delta X = \Delta d$$

oraz

$$(I - A)^{-1}\Delta d = \Delta X\,.$$

Zależności te pozwalają na wyznaczenie przyrostu wektora produktu końowego na podstwie ustalonego przyrostu wektora produkcji całkowitej i odwrotnie, bez uwzględniania pierwotniej wartości produkcji całkowitej i produktu końcowego.

Model Leontiewa - c.d.

Zastosowania modelu Leontiewa do prognozowania wielkości produkcji całkowitej lub produktu końcowego, oparte jest na założeniu, że wielkości te są mierzalne i możemy jest zapisać za pomocą liczb rzeczywistych.

Jednak w rzeczywistej gospodarce niektóre wielkości ekonomiczne są trudno mierzalne. Precyzyjne określenie popytu ze strony sektora gospodarstw domowych na produkcję określonej gałęzi może być wręcz niemożliwe, ponieważ jest on obarczony niepewnością i podlega ciągłym fluktuacjom. Również poziom produkcji całkowitej jest podatny na wszelakie zakłócenia i sygnały płynące z gospodarki, co nastręcza trudności z jednoznaczym opisaniem jego wartości.

W tej sytuacji możemy się zwrócić w stronę zbiorów i liczb rozmytych, które umożliwiają matematyczny opis wielkości niepewnych i nieprecyzyjnych.

Zbiory rozmyte według Zadeha, 1965

Pojęcie zbioru rozmytego wprowadził Lotfi Zadeh w 1965 roku.

Definicja

Zbiorem rozmytym A w pewnej (niepustej) przestrzeni X, nazywamy zbiór par:

$$A = \{(\mu_A(x), x)\}, \ \forall x \in X$$

gdzie

$$\mu_A : X \longrightarrow [0, 1]$$

jest funkcją przynależności zbioru rozmytego A, która każdemu elementowi $x \in X$ przypisuje jego stopień przynależności do zbioru rozmytego A.

Zbiory rozmyte

Możemy wyróżnić trzy przypadki:

- $\mu_A(x) = 1$ oznacza pełną przynależność elementu x do zbioru rozmytego A, tzn. $x \in A$,
- $\mu_A(x) = 0$ oznacza brak przynależności do zbioru rozmytego A, tzn. $x \notin A$,
- $0 < \mu_A(x) < 1$ oznacza częściową przynależność do zbioru rozmytego A.

Wraz z określeniem zbioru rozmytego określa się pewne jego integralne parametry jak nośnik, $\alpha-$przekrój i jądro.

Definicja

Nośnikiem zbioru rozmytego A nazywamy zbiór nierozmyty oznaczany jako supp$A$ i określony następująco:

$$\mathrm{supp}A = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}.$$

Definicja

$\alpha-$przekrojem zbioru rozmytego A, oznaczanym jako A_α, nazywamy następujący zbiór nierozmyty:

$$A_\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}, \ \forall_{\alpha \in [0,1]}$$

czyli zbiór określony przez funkcję charakterystyczną postaci:

$$\chi_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad \mu_A(x) \geq \alpha \\ 0 & \text{gdy} \quad \mu_A(x) < \alpha \end{cases} .$$

Definicja

Jądrem zbioru rozmytego A nazywamy zbiór nierozmyty oznaczany jako ker$A$ i określony następująco:

$$\text{ker}A = \{x \in X : \mu_A(x) = 1\}.$$

Definicja

Liczba rozmyta A to szczególny rodzaj zbioru rozmytego określonego na zbiorze liczb rzeczywistych ($X = \mathbb{R}$), który dodatkowo spełnia następujące warunki:

- jest normalny ($\exists x \in X : \ \mu_A(x) = 1$),
- jest wypukły ($\forall x_1, x_2 \in X, \ \forall \lambda \in [0,1]$: $\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2))$),
- jego nośnik jest przedziałem,
- jego funkcja przynależności jest przedziałami ciągła.

Zbiory rozmyte spełniające powyższe warunki w wielu pracach nazywane są rozmytymi liczbami wypukłymi.

Operacje na liczbach rozmytych

Cztery podstawowe operacje na liczbach rozmytych:

- dodawanie $(+)$,
- odejmowanie $(-)$,
- mnożenie $(\cdot)$,
- dzielenie $(/)$

wyglądają następująco.

Niech A i B będą liczbami rozmytymi z funkcjami przynależności μ_A i μ_B wówczas:

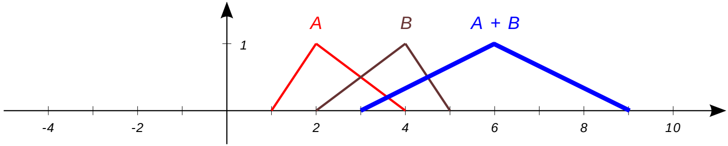
$$\mu_{A*B} = \sup_{z=x*y} \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

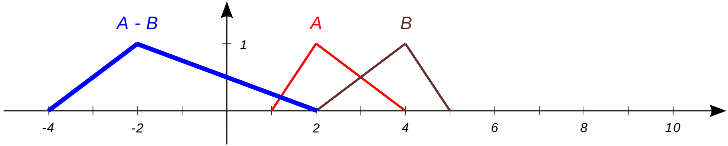
gdzie $*$ oznacza odpowiednio $+$, $-$, $\cdot$, $/$, oraz $x, y, z \in \mathbb{R}$ (przy dzieleniu $y \neq 0$).

Ograniczenia operacji na liczbach rozmytych

Tak określone liczby rozmyte i działania na nich (które są dość skomplikowane obliczeniowo), stwarzają pewne ograniczenia:

- powiększanie nośnika (niezależnie czy dwie liczby rozmyte dodajemy czy też odejmujemy, następuję powiększanie nośnika).





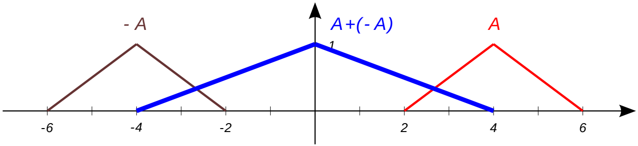
- brak elementów symetrycznych względem $+$, $\cdot$, a więc dla dowolnej liczby rozmytej A nie istnieją liczby rozmyte B i C takie, że:

$$A + B = 0 \quad \text{oraz} \quad A \cdot C = 1$$

co oznacza, że:

$$A + (-A) \neq 0 \quad \text{oraz} \quad A \cdot A^{-1} \neq 1$$

gdzie 0 i 1 oznaczają liczby rzeczywiste.

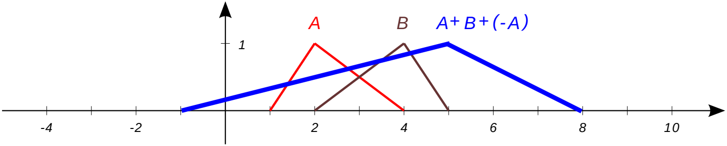


- bezpośrednią, negatywną konsekwencją braku elementów symetrycznych może być brak, w ogólnym przypadku, możliwości rozwiązania prostych równań postaci:

$$X + A = B \quad \text{gdyż} \quad X + A + (-A) \neq X$$

oraz

$$X \cdot A = C \quad \text{gdyż} \quad X \cdot A \cdot A^{-1} \neq X\,.$$



Skierowane liczby rozmyte

Wspomnianych powyżej ograniczeń pozbawiony jest nowy model liczb rozmytych, skierowane liczby rozmyte (Ordered Fuzzy Numbers - OFN), opracowany przez W. Kosińskiego, P. Prokopowicza, R. Koleśnika.

Definicja

Skierowaną liczbą rozmytą A nazywamy uporządkowaną parę funkcji:

$$A = (f_A, g_A)$$

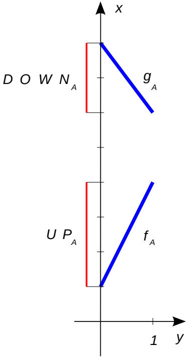
gdzie obie funkcje są ciągłe oraz

$$f_A, g_A : [0, 1] \to \mathbb{R}.$$

Odpowiednie części skierowanej liczby rozmytej nazywamy częścią wznoszącą (UP) i częścią opadającą ($DOWN$).

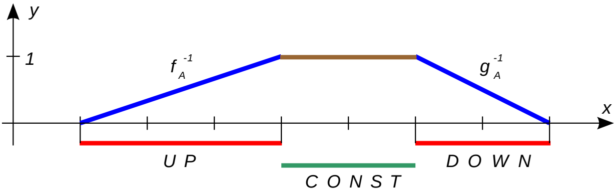
Ponieważ obie części są ciągłe, to ich obrazy są ograniczonymi przedziałami odpowiednio UP_A i $DOWN_A$, których granice oznaczamy następująco:

- $UP_A = (l_A, 1_A^-)$,
- $DOWN_A = (1_A^+, p_A)$,
- na przedziale $[1_A^-, 1_A^+]$ dołączamy funkcję stałą ($CONST_A$) równą 1 (warunek normalności).



Skierowane liczby rozmyte - c.d.

Skierowaną liczbę rozmytą możemy przedstawić w sposób nawiązujący do liczb rozmytych w klasycznym podejściu.

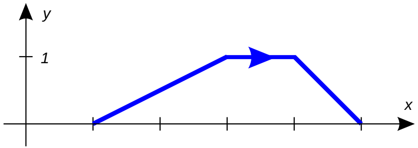


Wówczas $UP_A \cup [1_A^-, 1_A^+] \cup DOWN_A$ tworzą jeden przedział (nośnik liczby A) i możemy określić funkcję przynależności w następujący sposób :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy} \quad x \notin [l_A, p_A] \\ f_A^{-1}(x) & \text{gdy} \quad x \in UP_A \\ 1 & \text{gdy} \quad x \in [1_A^-, 1_A^+] \\ g_A^{-1}(x) & \text{gdy} \quad x \in DOWN_A \end{cases} .$$

Skierowane liczby rozmyte - c.d.

Tak określone liczby rozmyte nawiązują do klasycznych liczb rozmytych, są jednak wyposażone w dodatkową własność zaznaczoną strzałką - skierowanie.



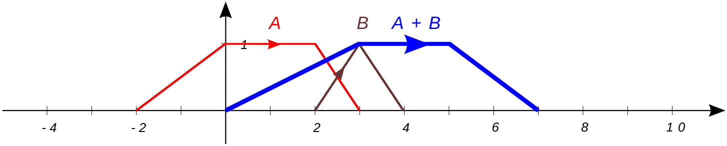
Strzałka (skierowanie) przedstawia porządek odwróconych funkcji *UP* i *DOWN* oraz orientację skierowanej liczby rozmytej.

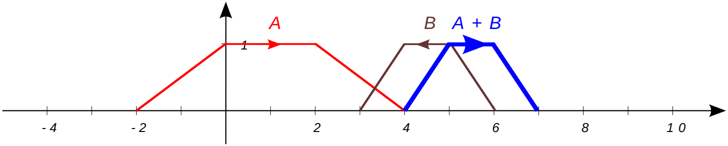
Podstawowe działania na skierowanych liczbach rozmytych określone są następjąco.

Niech $A = (f_A, g_A)$, $B = (f_B, g_B)$ i $C = (f_C, g_C)$ będą skierowanymi liczbami rozmytymi wówczas:

- C jest sumą liczb A i B ($C = A + B$), jeżeli:

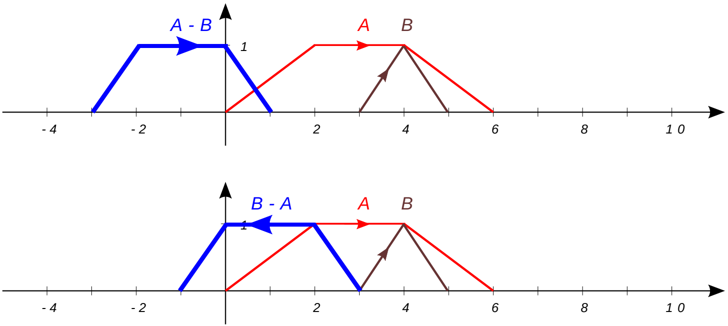
$$\forall y \in [0,1] \quad [f_A(y) + f_B(y) = f_C(y) \quad \text{i} \quad g_A(y) + g_B(y) = g_C(y)]$$





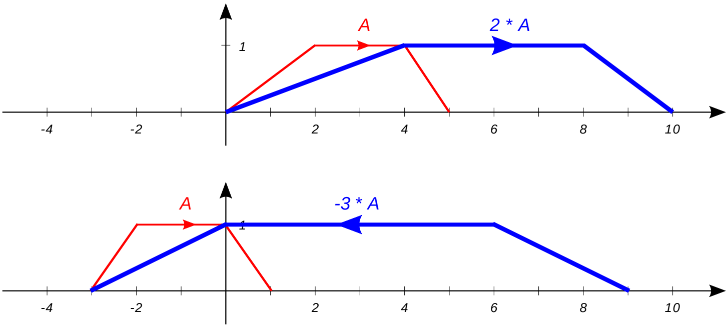
- C jest różnicą liczb A i B ($C = A - B$), jeżeli:

$$\forall y \in [0,1] \quad [f_A(y) - f_B(y) = f_C(y) \quad \text{i} \quad g_A(y) - g_B(y) = g_C(y)]$$



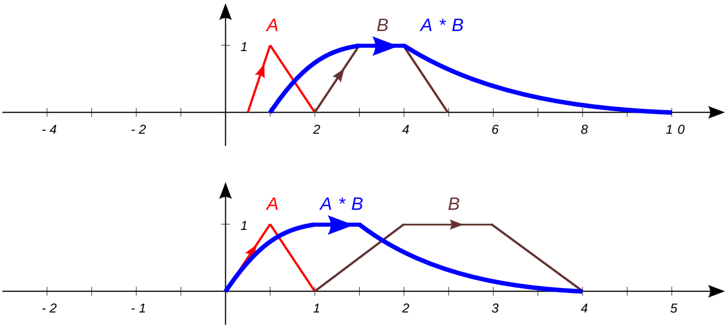
- C jest iloczynem liczby A przez skalar r $(C = r \cdot A)$, jeżeli:

$$\forall y \in [0,1] \quad [r \cdot f_A(y) = f_C(y) \quad \text{i} \quad r \cdot g_A(y) = g_C(y)]$$



- C jest iloczynem liczb A i B ($C = A \cdot B$), jeżeli:

$$\forall y \in [0,1] \quad [f_A(y) \cdot f_B(y) = f_C(y) \quad \text{i} \quad g_A(y) \cdot g_B(y) = g_C(y)]$$

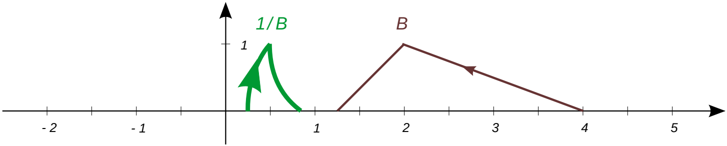


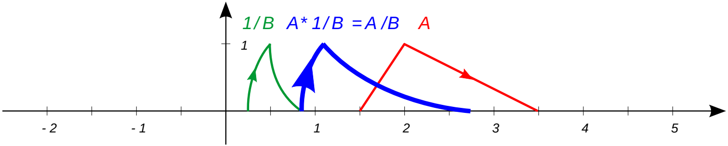
- C jest ilorazem liczb A i B ($C = A/B$), jeżeli:

$$\forall y \in [0,1] \quad [f_B(y) \neq 0 \quad \text{i} \quad g_B(y) \neq 0]$$

oraz

$$\forall y \in [0,1] \quad [f_A(y)/f_B(y) = f_C(y) \quad \text{i} \quad g_A(y)/g_B(y) = g_C(y)].$$





Operacje na skierowaych liczbach rozmytych - c.d.

Tak określone działania na skierowanych liczbach rozmytych są zbliżone do działań na liczbach rzeczywistych.

W szczególności dla dowolnej skierowanej liczby rozmytej A otrzymujemy:

$$A - A = A + (-1) \cdot A = 0$$

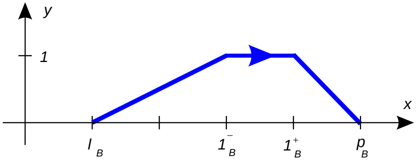
oraz

$$A \cdot A^{-1} = A \cdot \frac{1}{A} = 1$$

o ile skierowana liczba A jest odwracalna (0 oraz 1 oznaczają liczby rzeczywiste).

Skierowane liczby rozmyte - inny opis

W modelu Leontiewa wykorzystamy skierowne liczby rozmyte w których części *UP* i *DOWN* będą funkcjemi liniowymi, z tego względu wykorzystamy inny ich zapis.
Na rysunku zaznaczono charakterystyczne punkty OFN B, które w sposób jednoznaczny ją opisują.



Każdą taką liczbę możemy opisać za pomocą czwórki liczb rzeczywistych l_B, 1_B^-, 1_B^+ i p_B, gdzie:

$$\mu_B(l_B) = 0, \quad \mu_B(1_B^-) = 1, \quad \mu_B(1_B^+) = 1, \quad \mu_B(p_B) = 0$$

co pozwala zapisać ją w postaci:

$$B = (l_B \quad 1_B^- \quad 1_B^+ \quad p_B).$$

W dalszej części wykorzystamy tylko dodawanie, mnożenie przez skalar oraz liczby o skierowaniu przeciwnym.

Wspomniane działania wyglądają następująco.
Niech $Z = (l_Z \quad 1_Z^- \quad 1_Z^+ \quad p_Z)$ i $S = (l_S \quad 1_S^- \quad 1_S^+ \quad p_S)$ będą skierownymi liczbami rozmytymi oraz niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Wówczas:

- $Z + S = (l_Z + l_S \quad 1_Z^- + 1_S^- \quad 1_Z^+ + 1_S^+ \quad p_Z + p_S)$,
- $\alpha \cdot Z = (\alpha \cdot l_Z \quad \alpha \cdot 1_Z^- \quad \alpha \cdot 1_Z^+ \quad \alpha \cdot p_Z)$,
- liczba przeciwnie skierowana do liczby Z, oznaczona przez $Z^{\perp}$, ma postać $Z^{\perp} = (p_Z \quad 1_Z^+ \quad 1_Z^- \quad l_Z)$.

Określimy jeszcze szerokość nośnika liczby Z jako:

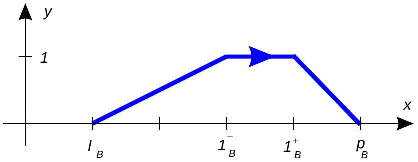
$$|\mathrm{supp}Z| = (\max\{l_Z, 1_Z^-, 1_Z^+, p_Z\} - \min\{l_Z, 1_Z^-, 1_Z^+, p_Z\}).$$

Ekonomiczna interpretacja wektora produkcji X

Współrzędne X_i, $(i = 1, 2, 3)$ wektora produkcji całkowitej X będziemy reprezentować za pomocą skierowanych liczb rozmytych. Pozwalają ona na uwzględnienie trzech elementów: ocenę prespektyw przed gałęzią w nadchodzącym okresie, możliwości dokonania zmian w poziomie produkcji całkowitej oraz jaki to pociągnie za sobą skutek finansowy dla gałezi (mierzony np. za pomocą zysku).

Elementy te znajdują odwierciedlenie w OFN w następujący sposób:

- skierowanie określa koniunkturę w gałęzi,
- nośnik opisuje możliwe do osiągniecia poziomy produkcji nie pogarszające kondycji finansowej gałezi,
- wartości funkcji przynależności ilustrują zmianę kondycji finansowej gałęzi.



Liczby o skierowaniu pokazanym na rysunku, umownie nazwiemy je o skierowaniu dodatnim, będą opisywały poziom produkcji całkowitej w gałezi, która ma przed sobą dobre perspektywy w nadchodzącym okresie.

Zwyżkująca koniunktura na produkcję tej gałęzi sprawia, że powinna ona zwiększyć poziom produkcji całkowitej, poprawiając wynik finansowy, którego miernikiem będzie funkcja przynależności.

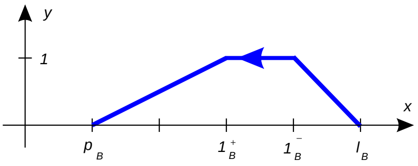
Ekonomiczna interpretacja wektora produkcji X -c.d.

Poszczególnym elementom skierowanej dodatnio liczby rozmytej możemy nadać następującą interpretację ekonomiczną:

- punkt l_B - wyjściowy poziom produkcji, który może być utrzymany bez zmiany wyniku finansowego gałęzi. Wartość funkcji przynależności $\mu_B(l_B) = 0$ stanowi wartość odniesienia, w stosunku do której odnoszony jest wynik finansowy uzyskany przy wyższych poziomach produkcji.
- część *UP* - część ta odzwierciedla sytuację, że rosnący poziom produkcji całkowitej zapewnia gałęzi coraz lepszy wynik finansowy (gałąź dysponowała niewykorzystanymi środkami produkcji w postaci maszyn, urządzeń czy też całych linii produkcyjnych, których uruchomienie nie pociągą za sobą znacznych kosztów, wówczas dodatkowy przychód przewyższy poniesione dodatkowe koszty).

Ekonomiczna interpretacja wektora produkcji X -c.d.

- część *CONST* - poziom produkcji, który umownie nazwiemy optymalnym. W danej sytuacji gospodarczej poziom taki zapewnia najlepszy wynik finansowy (dodatkowe koszty zaczynają równoważyć dodatkowy przychód).
- część *DOWN* - ta część odzwierciedla sytuację, że dalsze zwiększanie poziomu produkcji zacznie osłabiać wynik finansowy w stosunku do *CONST* (znaczny wzrost kosztów w coraz większym stopniu będzie pochłaniać wyższy przychód, mogą się również pojawić kłopoty ze zbytem i magazynowaniem nadmiaru produkcji).
- punkt p_B - jest to maksymalny poziom produkcji jaki może być osiągnięty, bez pogarszania kondycji finansowej gałęzi (zwięszanie produkcji pociąga za sobą znaczne koszty, których nie da się zbilansować wyższym przychodem, dodatkowo mogą się nasilić trudności ze zbytem produkcji).



OFN pokazaną na rysunku, nazwiemy ją o skierowaniu ujemnym, użyjemy do charakteryzacji poziomu produkcji w gałęzi, która ma przed sobą pogarszającą się perspektywę. Słabnący popyt na produkcję tej gałęzi sprawia, że powinna ona zmniejszyć poziom produkcji całkowitej, który może poprawić wynik finansowy lub złgodzić skutki złej koniunktury. Punkt l_B określa poziom produkcji w danej gałezi w okresie poprzedzającym badanie, a wartość $\mu_B(l_B) = 0$ określa oczekiwany wynik finansowy gałezi, który gałąź by osiągnęła, gdyby nie nastąpiły zmiany w poziomie produkcji przy słabnącej koniunkturze.

Ekonomiczna interpretacja wektora produkcji X - c.d.

Poszczególne elementy skierowanej ujemnie liczby rozmytej możemy interpretować następująco:

- punkt l_B - wyjściowy poziom produkcji. Przy złej koniunkturze, niższe przychody oraz rosnące koszty związane z magazynowaniem niewykorzystanej produkcji pogarszają wynik finansowy i zmuszą gałąź do obniżenia poziomu produkcji.
- część UP - obniżanie poziomu produkcji będzie łagodzić skutki złej koniunktury i poprawiać kondycję gałęzi (niższa produkcja zapewnia mniejszy przychód, to jednak spadek kosztów związanych z zakupem surowców do produkcji oraz kosztów magazynowania ewentualnego nadmiaru produkcji zapewnia poprawę wyniku finansowego).

Ekonomiczna interpretacja wektora produkcji X - c.d.

- część *CONST* - poziom produkcji, optymalny w aktualnej sytuacji gospodarczej, zapewnia zbyt całej produkcji.
- część *DOWN* - ta część odzwierciedla przekonanie, że dalsze obniżanie poziomu produkcji może doprowadzić do pogorszenia kondycji finansowej gałęzi w stosunku do *CONST* (malejąca produkcja zapewnia niższy przychód, który w coraz większym stopniu jest pochłaniany przez koszty związane z funkcjonowaniem gałęzi, np. koszty stałe).
- punkt p_B - jest to minimalny poziom produkcji, który zapewnia gałęzi funkcjonowanie. Dalsze obniżanie produkcji grozi bankructwem i wyjściem z rynku.

Przykład

Rozważmy pewien fikcyjny system gospodarczy składający się z trzech gałęzi. Tablica jest tablicą przepływów międzygałęziowych tego systemu.

numer gałęzi		przepływy x_{ij}, j = 1	2	3	produkt końcowy d_i	produkcja całkowita X_i
	1	140	320	180	760	1400
i	2	280	640	360	320	1600
	3	420	160	720	500	1800

Wyznaczamy macierz A współczynników kosztów oraz macierz Leontiewa:

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix} \implies (I - A) = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,2 & -0,1 \\ -0,2 & 0,6 & -0,2 \\ -0,3 & -0,1 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Przykład - c.d.

Rozważymy możliwy do uzyskania produkt końcowy, w zależności od przewidywanego wektora produkcji całkowitej, którego współrzędne będą skierowanymi liczbami rozmytymi.

Analiza będzie ukierunkowana na rozmiary możliwego do uzyskania produktu końcowego, tendencji w nadchodzącym okresie w kształtowaniu się tego produktu w zależności od zadanego wektora produkcji całkowitej oraz możliwości uzyskania dodatkowych informacji (korzyści) jakie daje stosowanie skierowanych liczb rozmytych.

Lp.	X	d	$\lvert \mathrm{supp} X \rvert$	$\lvert \mathrm{supp} d \rvert$
1	$\begin{pmatrix} (1400 \;\; 1410 \;\; 1420 \;\; 1430) \\ \chi_{1600} \\ \chi_{1800} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (760 \;\; 769 \;\; 778 \;\; 787) \\ (320 \;\; 318 \;\; 316 \;\; 314) \\ (500 \;\; 497 \;\; 494 \;\; 491) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +27 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} (1400 \;\; 1420 \;\; 1440 \;\; 1460) \\ \chi_{1600} \\ \chi_{1800} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (760 \;\; 778 \;\; 796 \;\; 814) \\ (320 \;\; 316 \;\; 312 \;\; 308) \\ (500 \;\; 494 \;\; 488 \;\; 482) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +54 \\ -12 \\ -18 \end{pmatrix}$

Przykład - c.d.

W wierszu 1 tabeli widzimy efekt dodatniego rozmycia współrzędnej X_1 i jego wpływ na produkt końcowy.

Opis wektora X oznacza, iż pierwsza gałąź ma przed sobą dobre perspektywy, a jej produkcja powinna się kształtować w zakresie $(1400, 1430)$, aby gałąź wykorzystała koniunkturę i poprawiła wynik finansowy.

Dodatkowo, aby osiągnąć optymalny (najlepszy) wynik, produkcja powinna oscylować w przedziale $(1410, 1420)$.

Ponadto widzimy, że w dwóch pozostałych gałęziach nie ma istotnych przesłanek, które mogłby wpłynąć na poziom produkcji, w wyniku czego dotychczasowy poziom produkcji, odpowiednio 1600 i 1800, powinien zostać zachowany.

Przykład - c.d.

Jakie wnioski dotyczące możliwego do uzyskania produktu końcowego możemy wyciągnąć?

Widzimy, że produkt końcowy pierwszej gałęzi będzie miał tendencje do wzrostu i oscylował w zakresie $(760, 787)$.

Produkty w dwóch pozostałych gałęziach będą się obniżać i kształtować w przedziałach odpowiednio $(314, 320)$ i $(491, 500)$.

Dodatkowo jeżeli gałąź pierwsza ustawi poziom produkcji na poziomie optymalnym ($CONST$), wówczas produkt końcowy będzie się kształtował w poszczególnych gałęziach odpowiednio w zakresach $(769, 778)$, $(316, 318)$ i $(494, 497)$.

Przykład - c.d.

Możemy również analizować części *UP* i *DOWN* współrzędnych wektora produkcji.

Ustalenie produkcji na poziomie z części *UP*, czyli w zakresie $(1400, 1410)$, oznacza, że gałąź chce skorzystać z dobrej koniunktury, ale jednocześnie przewiduje, że koniunktura w dalszej przyszłości może nie być już tak dobra, co zniechęca do większych inwestycji i rozszerzania produkcji. Wówczas produkt końcowy będzie się kształtował w zakresie odpowienio $(760, 769)$, $(318, 320)$ i $(497, 500)$.

Z kolei część *DOWN* odzwieciedla, że perspektywy długofalowe są dobre i znaczące zwiększenie poziomu produkcji, mimo nie uzyskania optymalnego wyniku finansowego w nadchodzącym okresie, zapewni w dłuższej perspektywie dobry wynik.

Przykład - c.d.

Szerokość nośnika liczby rozmytej pozwoli to na określenie maksymalnych zmian, jakich można oczekiwać w produkcie końcowym, gdyby gałęzie dokonały w poziomie produkcji maksymalnych zmian zapewniających niepogarszanie wyniku finansowego.
Widzimy, że w gałęzi pierwszej produkcja może maksymalnie wzrosnąć o 30 (w dwóch pozostałych pozostaje bez zmian). Spowodowałoby to wzrost produktu w gałęzi pierwszej o 27, a w dwóch pozostałych spadek odpowiednio o 6 i 9. Zmiany te wynikają z faktu, że przy stałej produkcji w gałęzi drugiej i trzeciej, wzrost produkcji w gałęzi pierwszej powoduje większe zapotrzebowanie ze strony tej gałęzi na produkcję pozostałych, co odbija się w ich malejącym produkcie końcowym.
Dodatkowo większe zmiany w gałęzi trzeciej odzwierciedlają wyższy udział tej gałęzi w produkcji gałęzi pierwszej co jest widoczne w przepływach międzygałęziowych $x_{31} = 420$ w stosunku do $x_{21} = 280$.

Przykład - c.d.

Możemy również dokanać analizy funkcji przynależności, przez pryzmat $\alpha-$przekrojów.
Jeżeli każda z gałęzi chce ustawić produkcję na poziomie, który zapewni jej co najmniej 50% poprawę wyniku finansowego, z możliwego do uzyskania (1 stanowi 100%), to posłużymy się przekrojem $\alpha = 0.5$.

$$X_{0.5} = \begin{pmatrix} (1405, 1425) \\ 1600 \\ 1800 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad d_{0.5} = \begin{pmatrix} (764.5, 782, 5) \\ (315, 319) \\ (492.5, 498.5) \end{pmatrix}.$$

Drugi wiersz tabeli obrazuje efekty wywołane w produkcie końcowym, gdy możliwe są znacznie większe zmiany w poziomie produkcji gałęzi pierwszej. Uzyskane wyniki pokazują nasilenie wszystkich rezultatów. Otrzymujemy większe rozmycie przedziałów produktu końcowego i większe możliwe do uzyskania zamiany maksymalne.

Tabela przedstawia rozmycia współrzędnych wektora X i skutki na produkt końcowy (D - rozmycie dodatnie, U - ujemne).

skier.	X	d	$\|\mathrm{supp}X\|$	$\|\mathrm{supp}d\|$
$X(DDD)$	$\begin{pmatrix} (1400 & 1410 & 1420 & 1430) \\ (1600 & 1610 & 1620 & 1630) \\ (1800 & 1810 & 1820 & 1830) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (760 & 766 & 772 & 778) \\ (320 & 322 & 324 & 326) \\ (500 & 502 & 504 & 506) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +30 \\ +30 \\ +30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +18 \\ +6 \\ +6 \end{pmatrix}$
$X(UDD)$	$\begin{pmatrix} (1400 & 1390 & 1380 & 1370) \\ (1600 & 1610 & 1620 & 1630) \\ (1800 & 1810 & 1820 & 1830) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (760 & 748 & 736 & 724) \\ (320 & 326 & 332 & 338) \\ (500 & 508 & 516 & 524) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -30 \\ +30 \\ +30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -36 \\ +18 \\ +24 \end{pmatrix}$
$X(DUD)$	$\begin{pmatrix} (1400 & 1410 & 1420 & 1430) \\ (1600 & 1590 & 1580 & 1570) \\ (1800 & 1810 & 1820 & 1830) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (760 & 770 & 780 & 790) \\ (320 & 310 & 300 & 290) \\ (500 & 504 & 508 & 512) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +30 \\ -30 \\ +30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +30 \\ -30 \\ +12 \end{pmatrix}$
$X(DDU)$	$\begin{pmatrix} (1400 & 1410 & 1420 & 1430) \\ (1600 & 1610 & 1620 & 1630) \\ (1800 & 1790 & 1780 & 1770) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (760 & 768 & 776 & 784) \\ (320 & 326 & 332 & 238) \\ (500 & 590 & 580 & 470) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +30 \\ +30 \\ -30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +24 \\ +18 \\ -30 \end{pmatrix}$
$X(UUD)$	$\begin{pmatrix} (1400 & 1390 & 1380 & 1370) \\ (1600 & 1590 & 1580 & 1570) \\ (1800 & 1810 & 1820 & 1830) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (760 & 752 & 744 & 736) \\ (320 & 314 & 308 & 302) \\ (500 & 510 & 520 & 430) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -30 \\ -30 \\ +30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -24 \\ -18 \\ +30 \end{pmatrix}$
$X(UDU)$	$\begin{pmatrix} (1400 & 1390 & 1380 & 1370) \\ (1600 & 1610 & 1620 & 1630) \\ (1800 & 1790 & 1780 & 1770) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (760 & 750 & 740 & 730) \\ (320 & 330 & 340 & 350) \\ (500 & 496 & 492 & 488) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -30 \\ +30 \\ -30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -30 \\ +30 \\ -12 \end{pmatrix}$
$X(DUU)$	$\begin{pmatrix} (1400 & 1410 & 1420 & 1430) \\ (1600 & 1590 & 1580 & 1570) \\ (1800 & 1790 & 1780 & 1770) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (760 & 772 & 784 & 796) \\ (320 & 314 & 308 & 302) \\ (500 & 492 & 484 & 476) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +30 \\ -30 \\ -30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +36 \\ -18 \\ -24 \end{pmatrix}$
$X(UUU)$	$\begin{pmatrix} (1400 & 1390 & 1380 & 1370) \\ (1600 & 1590 & 1580 & 1570) \\ (1800 & 1790 & 1780 & 1770) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (760 & 754 & 748 & 742) \\ (320 & 318 & 316 & 314) \\ (500 & 498 & 496 & 494) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -30 \\ -30 \\ -30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -18 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$

Podsumowanie

- Symulacje pokazują, że OFN mogą być stosowane w modelach ekonomicznych, dając wyniki zgodne z intuicją i wiedzą ekonomiczną.
- Prostota wykonywanych na nich działań i ilość informacji jakie mogą przenosić stanowią niewątpliwie ich zalety.
- Pozwlają na modelowanie zjawisk i wielkości, których nie daje się zmierzyć i opisać z pomocą liczb rzeczywistych.
- Umożliwjają nie tylko śledzenie skutków, ale również tendencji w zależnościach systemu.
- Pozwalają również na jednoczesną analizę różnych aspektów ekonomicznych, co przy użyciu liczb rzeczywistych wymagałoby przeprowadzenia kilku analiz i rachunków.

Podsumowanie - c.d.

- W pracy założono, że funkcje *UP* i *DOWN* są liniowe, co ułatwia badanie i wyciąganie wniosków, szczególnie w przypadku $\alpha-$przekrojów.
- Aby urealnić analizę, funkcje te możemy zastąpić dowolnymi funkcjami, które wierniej będą odzwierciedlały zależności między poziomem produkcji a wynikiem finansowym gałęzi.
- Dodatkowo jedna lub dwie części skierowanej liczby rozmytej (*UP*, *CONST*, *DOWN*) mogą, w zależności od potrzeb, zostać zredukowane do punktu.

Literatura

1. Czerwiński Z., Matematyka na usługach ekonomii, PWN, Warszawa 1980.
2. Kacprzyk J., Zbiory rozmyte w analizie systemowej, PWN, Warszawa, 1986.
3. Kosiński W., On Soft Computing and Modeling, Image Processing and Communication, vol.11, no.1, pp.71-82.
4. Kosiński W., On Fuzzy Number Calculus, Int. J. Appl. Comput. Sci., 2006, vol.16, no.1, pp.51-57.
5. Kosiński W., Prokopowicz P., Algebra liczb rozmytych, Matematyka stosowana 5, 2004.
6. Prokopowicz P., Algorytmizacja działań na liczbach rozmytych i jej zastosowanie, Rozprawa doktorska, Warszawa, 2005.