O skrzyżowanych pierścieniach grupowych ściśle nieograniczonego typu reprezentacyjnego grup skończonych nad lokalnymi pierścieniami noetherowskimi

Leonid F. Barannyk, Dariusz Klein

Instytut Matematyki, Akademia Pomorska w Słupsku
Arciszewskiego 22b, 76-200 Słupsk

III Podlaska Konferencja Matematyki, 11 - 13 kwietnia 2008 r.

Typy reprezentacyjne algebr

S – pierścień przemienny z jedynką; S^* – multiplikatywna grupa pierścienia S; A – skończenie generowana S-algebra wolna.

A nazywamy algebrą ograniczonego typu reprezentacyjnego, jeśli zbiór stopni parami nierównoważnych nierozkładalnych reprezentacji macierzowych tej algebry jest skończony.

A nazywamy algebrą nieograniczonego typu reprezentacyjnego, jeśli zbiór stopni parami nierównoważnych nierozkładalnych reprezentacji macierzowych tej algebry jest nieskończony.

Typy reprezentacyjne algebr

Algebrę A nazywamy ściśle nieograniczonego typu reprezentacyjnego (**S**trongly **U**nbounded **R**epresentation type), jeśli istnieje funkcja $f_A \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taka, że $f_A(n) \geq n$ i liczba nierozkładalnych reprezentacji macierzowych wymiaru $f_A(n)$ algebry A jest nieskończona dla każdej liczby naturalnej $n > 1$. Funkcję f nazywamy SUR-wymiarowo-wartościową.

A nazywamy algebrą skończonego typu reprezentacyjnego, jeśli liczba jej parami nierównoważnych nierozkładalnych reprezentacji jest skończona.

A nazywamy algebrą nieskończonego typu reprezentacyjnego, jeśli liczba jej parami nierównoważnych nierozkładalnych reprezentacji jest nieskończona.

Hipotezy Brauera-Thralla

Bardzo ważny etap w rozwoju teorii reprezentacji stanowiły badania dwóch hipotez Brauera-Thralla znanych z publikacji J.P. Jans'a (1957), ucznia Thralla.

Pierwsza hipoteza Brauera-Thralla

Algebry ograniczonego typu reprezentacyjnego nad dowolnym ciałem są faktycznie algebrami skończonego typu reprezentacyjnego.

Druga hipoteza Brauera-Thralla

Algebry nieograniczonego typu reprezentacyjnego nad ciałami nieskończonymi są faktycznie algebrami ściśle nieograniczonego typu reprezentacyjnego.

Rozstrzygnięcie hipotez Brauera-Thralla dla algebr grupowych

Niech G będzie grupą skończoną, G_p – p-podgrupą Sylowa grupy G, a F – ciałem charakterystyki p.

D. Higman (1954)

Jeśli G_p jest grupą cykliczną, to algebra grupowa FG jest skończonego typu reprezentacyjnego.

Jeśli G_p nie jest grupą cykliczną, to algebra grupowa FG jest nieograniczonego typu reprezentacyjnego.

Rozstrzygnięcie hipotez Brauera-Thralla dla algebr grupowych

V.A. Bashev (1961)

Jeśli G jest grupą abelową typu $(2, 2)$, a F – ciałem nieskończonym charakterystyki 2, to FG ma nieskończoną liczbę reprezentacji nierozkładalnych wymiaru $2n$ dla dowolnej liczby naturalnej n.

P.M. Gudivok (1961) i G.J. Janusz (1970, 1972)

Niech G będzie niecykliczną p-grupą abelową rzędu $|G| \neq 4$, a F – ciałem nieskończonym charakterystyki p. Algebra FG ma nieskończoną liczbę reprezentacji nierozkładalnych wymiaru n dla dowolnego $n \geq 2$.

Dowód pierwszej hipotezy Brauera-Thralla dla skończenie wymiarowych algebr nad dowolnym ciałem podał A.V. Roiter (1968).

Dowód drugiej hipotezy Brauera-Thralla dla algebr nad ciałem algebraicznie domkniętym został podany w pracy L.A. Nazarova, A.V. Roiter (1975).

Wyniki otrzymane przez P.M. Gudivoka i jego uczniów dotyczące typów reprezentacyjnych pierścieni grupowych SG, gdzie S jest przemiennym lokalnym pierścieniem charakterystyki p^k $(p \geq 1)$ nie będący ciałem, a G nietrywialną p-grupą

P.M. Gudivok, V.I. Pogorilyak (1989, 1996)

Pierścień SG jest ograniczonego typu reprezentacyjnego $\Leftrightarrow$ $|G| = 2$ i S jest pierścienień Bezout'a charakterystyki 2.

P.M. Gudivok, I.P. Sygetyj, I.B. Chukhraj (1999)

Niech G będzie niecykliczną p-grupą, $p > 2$ oraz niech S będzie nieskończonym pierścieniem charakterystyki p. Wtedy piercień SG jest ściśle nieograniczonego typu reprezentacyjnego z SUR-wymiarowo-wartościową funkcją $f_{SG}(n) = n$.

Wyniki otrzymane przez P.M. Gudivoka i jego uczniów dotyczące typów reprezentacyjnych pierścieni grupowych

P.M. Gudivok, I.B. Chukhraj (2000)

Niech S będzie lokalnym pierścieniem całkowitym charakterystyki p oraz $|G| > 2$. Wtedy pierścień SG jest ściśle nieograniczonego typu reprezentacyjnego z SUR-wymiarowo-wartościową funkcją $f_{SG}(n) = n$.

P.M. Gudivok, I.B. Chukhraj (2000)

Niech $|G| > 2$, $\operatorname{char} S = p^k$ $(k \geq 1)$ oraz niech $S/\operatorname{rad} S$ będzie ciałem nieskończonym. Wtedy piercień SG jest ściśle nieograniczonego typu reprezentacyjnego z SUR-wymiarowo-wartościową funkcją $f_{SG}(n) = n$.

Przykład pierścienia grupowego jednocześnie ograniczonego i nieskończonego typu reprezentacyjnego

Przykład

F – ciało charakterystyki 2, $S = F[[X]]$, $G = \langle a \rangle$ – grupa rzędu 2.

Nierozkładalne S-reprezentacje macierzowe grupy G, to:

$$\Delta_0\colon a \mapsto 1, \qquad \Delta_1\colon a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_2^i\colon a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & X^i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (i \in \mathbb{N}).$$

Wybrane warunki dostateczne na to, aby skrzyżowany pierścień grupowy był typu SUR

Niech G będzie p-grupą, G' – komutantem grupy G, a S – lokalnym pierścieniem całkowitym charakterystyki p nie będącym ciałem. Oznaczmy przez $Z^2(G,S^*)$ grupę unormowanych 2-kocykli grupy G o wartościach w S^*, przy czym zakładamy, że G działa trywialnie w zbiorze S^*. Niech $S^\lambda G$ będzie skrzyżowanym pierścieniem grupowym grupy G nad pierścieniem S z 2-kocyklem $\lambda \in Z^2(G,S^*)$. Przez $\mathrm{Ker}_S(\lambda)$ będziemy oznaczali jądro 2-kocyklu λ, tj. maksymalny dzielnik normalny grupy G mający własność taką, że ograniczenie λ do $G \times G$ jest 2-kobrzegiem o wartościach w S^*. Przypomnijmy, że $G' \subset \mathrm{Ker}_S(\lambda)$.

Wybrane warunki dostateczne na to, aby skrzyżowany pierścień grupowy był typu SUR

L.F. Barannyk, D. Klein (2004)

Niech $\lambda \in Z^2(G, S^*)$ oraz $H = \mathrm{Ker}_S(\lambda)$. Jeśli $|H : G'| > 2$, to pierścień $S^\lambda G$ jest ściśle nieograniczonego typu reprezentacyjnego z SUR-wymiarowo-wartościową funkcją $f_{S^\lambda G}(n) = n|G : H|$.

L.F. Barannyk, D. Klein (2004)

Niech S będzie pierścieniem noetherowskim, $\lambda \in Z^2(G, S^*)$ oraz $H = \mathrm{Ker}_S(\lambda)$. Jeśli $|H| > 2$, to $S^\lambda G$ jest ściśle nieograniczonego typu reprezentacyjnego z SUR-wymiarowo--wartościową funkcją $f_{S^\lambda G}(n) = n|G : H|$.

Wybrane warunki dostateczne na to, aby skrzyżowany pierścień grupowy był typu SUR

L.F. Barannyk, D. Klein (2004)

Niech F będzie podciałem S, $\lambda \in Z^2(G, F^*)$ i $d = \dim_F(F^\lambda G/\operatorname{rad} F^\lambda G)$. Załóżmy, że spełniony jest jeden z następujących warunków:

(i) $p \neq 2$ i $d < |G : G'|$;

(ii) $p \neq 2$, $d < |G|$ i S jest pierścieniem noetherowskim;

(iii) $p = 2$ i $d < \frac{1}{2}|G : G'|$.

Wtedy $S^\lambda G$ jest pierścieniem ściśle nieograniczonego typu reprezentacyjnego z SUR-wymiarowo-wartościową funkcją $f_{S^\lambda G}(n) = nd$.

Przyjęte oznaczenia

G – grupa skończona rzędu $p^r l$, $(p, l) = 1$;

G_p – p-podgrupa Sylowa grupy G;

G'_p – komutant grupy G_p;

S – przemienny lokalny pierścień noetherowski charakterystyki p nie będący ciałem, przy czym jeśli S nie jest pierścieniem całkowitym, to $S/\operatorname{rad} S$ jest ciałem nieskończonym;

F – podciało pierścienia S;

$\lambda \in Z^2(G, F^*)$;

$d = \dim_F(F^\lambda G_p/\operatorname{rad} F^\lambda G_p)$.

Rezultat

Twierdzenie

Załóżmy, że $3d \leq |G_p|$ *oraz jeśli* $p = 2$, $2d = |G_2 : G_2'|$ *i* $|G_2'| = 2$, *to spełniony jest jeden z następujących warunków:*

1) $|\mathrm{Ker}_F(\lambda)| > 2$*;*

2) jeśli H *jest podgrupą* G_2, $G_2' \subset H$ *i* $H/G_2' = \mathrm{soc}(G_2/G_2')$, *to* H *jest grupą abelową;*

3) $F^\lambda G_2$ *nie jest algebrą uniseryjną oraz* G_2/G_2' *ma nie więcej niż trzy niezmienniki równe* 2.

Wówczas $S^\lambda G$ *jest pierścieniem ściśle nieograniczonego typu reprezentacyjnego z funkcją SUR-wymiarowo-wartościową* $f_{S^\lambda G}(n) = t_n$, *gdzie* $2nd \leq t_n \leq 2ndl$, *gdy* $p = 2$, $2d = |G_2 : G_2'|$ *i* $|G_2'| \geq 4$, *oraz* $nd \leq t_n \leq ndl$ *w pozostałych przypadkach.*

Bibliografia

- L. F. Barannyk and D. Klein, *Twisted group rings of strongly unbounded representation type*, Colloq. Math.100(2004), 265-287.
- V.A. Bashev, *Representations of the group $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ in a field of characteristic 2*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 141 (1961), 1015-1018.
- P.M. Gudivok, *On modular representations of finite groups*, Dokl. Uzhgorod Univ. Ser. Fiz.-Math. 4(1961), 86-87.
- P.M. Gudivok, I.B. Chukhray, *On the number of indecomposable matrix representations with a given degree of a finite p-group over commutative local rings of characteristic p*, Nauk. Visnyk Uzhgorod. Univ. Ser. Math. 5(2000), 33-40.

- P.M. Gudivok, I.B. Chukhray, *On indecomposable matrix representations of the given degree of a finite p-group over commutative local ring of characteristic p^s*, An. Ştiinţ. Univ. Ovidius Constanţa, Ser. Math. 8(2000), 27-36.
- P.M. Gudivok, V.I. Pogorilyak, *The representations of finite p-groups over local rings of positive characteristic*, Dopovidi Akad. Nauk URSR, 2(1989), 5-8.
- P.M. Gudivok, V.I. Pogorilyak, *On indecomposable representations of finite p-groups over commutative local rings*, Dopovidi Nat. Akad. Nauk Ukrainy 5(1996), 7-11.
- P.M. Gudivok, I.P. Sygetij, I.B. Chukhray, *On the number of indecomposable matrix representations with a given degree of finite p-group over certain commutative rings of characteristic p^s*, Nauk. Visnyk Uzhgorod. Univ. Ser. Math. 4(1999), 47-53.

- D.G. Higman, *Indecomposable representations at characteristic* p, Duke Math. J. 21(1954), 377-381.
- J.P. Jans, *On the indecomposable representations of algebras*, Ann. Math. 66(1957), 418-429.
- G.J. Janusz, *Faithful representations of* p*-groups at characteristic* p, I, J. Algebra 15(1970), 335-351.
- G.J. Janusz, *Faithful representations of* p*-groups at characteristic* p, II, J. Algebra 22(1972), 137-160.
- L.A. Nazarowa, A.V. Roiter, *Categorial matrix problems and the Brauer-Thrall conjecture*, Mitt. Math. Sem. Giessen 115(1975), 1-153.

A. V. Roiter, *Unboundedness of the dimensions of the indecomposable representations of an algebra which has infinitely many indecomposable representations*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 32 (1968), 1275-1282.