O JEDNOZNACZNOŚCI KONSTRUKCJI PIERŚCIENI PÓŁGRUPOWYCH

Jan Krempa

(Notatki związane z referatem)

1 Wprowadzenie

Wszystkie rozważane w tym tekście pierścienie będą łączne, z $1 \neq 0$. Będą one na ogół oznaczane początkowymi literami alfabetu.
$\mathrm{U}(A)$ to *grupa elementów odwracalnych* czyli *jedności* pierścienia A.
Półgrupy to faktycznie będą monoidy ze względu na mnożenie. Będą one na ogół oznaczane końcowymi literami alfabetu.

Niech A będzie dowolnym pierścieniem i X dowolną półgrupą. Tej parze przyporządkowany jest *pierścień półgrupowy półgrupy X o współczynnikach z pierścienia A*, oznaczany zwykle przez $A[X]$ lub AX. Jest to A-moduł wolny z bazą X oraz z mnożeniem pochodzącym od mnożeń w A i w X przy pomocy rozdzielności i warunku $xa = ax$ dla $a \in A$ i $x \in X$. Wobec przyjętych umów mamy:

$$A \xrightarrow{\alpha} AX \xleftarrow{\beta} X \quad \text{gdzie} \quad \alpha a = a1,\ \beta(x) = 1x. \tag{1}$$

Ten wzór pozwala już łatwo wyobrazić sobie, co to są *A-homomorfizmy AX w AY* i *X-homomorfizmy AX w BX*.

Celem notatek będzie dyskutowanie problemu, kiedy pierścieniowe własności pierścienia AX wyznaczają pierścień A, a kiedy wyznaczają półgrupę X. Wiele tego typu wyników można znaleźć w cytowanej literaturze, dalekiej jednak od kompletności. Obok sformułowań szeregu wyników z tych prac pojawi się też kilka pytań, które wydają się warte zainteresowania.

2 Jednoznaczność półgrupy

Zaczniemy od kwestii związanych z wyznaczaniem półgrupy przez pierścień półgrupowy.

Problem 1 Niech A będzie (ważnym z matematycznego punktu widzenia) pierścieniem i X grupą (półgrupą). Czy dla dowolnej grupy (półgrupy) Y mamy $AX \simeq_A AY \Rightarrow X \simeq Y$? Jeśli tak jest, to powiemy, że *pierścień A wyznacza grupę (półgrupę) X*.

Ponieważ każda grupa jest półgrupą, więc natychmiast pojawia się następująca kwestia:

Pytanie 1 Niech X będzie grupą. Czy jeśli A wyznacza X jako grupę, to wyznacza X jako półgrupę?

Oto przykład rezultatu redukującego zakres współczynników w pytaniu wyżej

Lemat 1 *Niech X będzie grupą (półgrupą), A pierścieniem, C jego centrum i D obrazem homomorficznym C. Wówczas:*
A wyznacza $X \Leftrightarrow C$ wyznacza X;
Jeśli D wyznacza X, to A wyznacza X.

Uwaga. W lemacie wyżej zamiast centrum można użyć dowolnego centralizatora, z podobnym skutkiem.

Naturalnym oczekiwaniem jest, że prawie każda grupa (półgrupa) jest wyznaczona przez jakiś pierścień współczynników. Wobec tego umówmy się, że grupa (półgrupa) X jest *wyjątkowa* jeśli istnieje grupa (półgrupa) Y taka, że $X \not\simeq Y$, ale $AX \simeq_A AY$ dla dowolnego pierścienia A. Okazuje się, że wyjątkowość wystarczy testować tylko na jednym pierścieniu.

Lemat 2 *Grupa (półgrupa) X jest* wyjątkowa $\Leftrightarrow$ *istnieje grupa (półgrupa) Y taka, że $X \not\simeq Y$ ale $\mathbb{Z}X \simeq \mathbb{Z}Y$.*

Jeśli zamiast wszystkich pierścieni rozważamy tylko te, ktore są algebrami nad ustalonym pierścieniem przemiennym K, to w lemacie wyżej pierścień $\mathbb{Z}$ należy zastąpić przez K, z tym samym skutkiem. Tak więc przykłady skończonych grup podane przez Dade'a ([8]) są wyjątkowe w klasie algebr grupowych nad ciałami, a grupy skończone skonstruowane przez Hertwecka ([1]) są wyjątkowe dla wszystkich współczynników.

Pytanie 2 Czy istnieje skończona grupa wyjątkowa jako półgrupa, ale nie jako grupa? Jeśli tak, to znaleźć przykłady małego rzędu.

Bez większego trudu można pokazać, że taka grupa skończona nie istnieje. Pytanie, wpisane do początkowej wersji notatek, pozostawiłem jako ilustrację faktu, że nie wszystkie kwestie formułowane tutaj są trudne. Ponieważ przykłady Hertwecka mają stosunkowo duży rząd, to pozostaje do rozważenia

Pytanie 3 *Znaleźć możliwie małe przykłady półgrup wyjątkowych należące do ważnych klas półgrup.*

Z doświadczeń wynika, że obok przypadku grup (półgrup) skończonych warto oddzielnie rozważyć przypadek beztorsyjny. Wprowadzimy jednak pewne typowe ograniczenia chroniące od bezproduktywności tych rozważań. Przyjmiemy mianowicie, że półgrupa X jest *up-półgrupą (tup-półgrupą)* jeśli dla dowolnych niepustych skończonych podzbiorów $Y, Z \subseteq X$ z $|Y| + |Z| > 2$, w zbiorze YZ istnieje co najmniej jeden element (co najmniej dwa elementy) reprezentowany w YZ tylko na jeden sposób. Wiadomo ([7]), że nie każda up-półgrupa jest tup-półgrupą, ale Strojnowski pokazał w [11], że każda up-grupa jest tup-grupą. Mamy więc

Lemat 3 *Niech X będzie up-grupą. Wtedy dla dowolnej dziedziny D mamy* $\mathrm{U}(DX) = \mathrm{U}(D) \times X$.

Korzystając również z wcześniejszych obserwacji otrzymujemy

Twierdzenie 1 *Dowolna up-grupa jest wyznaczona przez dowolny pierścień współczynników.*

Pytanie 4 Niech X będzie up-półgrupą, a D dziedziną. Czy $\mathrm{U}(DX) = \mathrm{U}(D) \times \mathrm{U}(X)$?

Pytanie 5 Czy dowolna up-półgrupa jest wyznaczona przez dowolny (lub przynajmniej jakiś) pierścień współczynników?

Istnieją oczywiście dalsze ciekawe pytania z tego zakresu. Dla przykładu, w algebrach grupowych wiele kwestii związanych ze zmianą ciała skalarów można znaleźć w [8]. Jako przykład pytania, którego dyskusji nie widziałem może służyć następujące:

Pytanie 6 *Nieh K będzie ciałem charakterystyki $p > 0$ z prostym podciałem K_0 i niech G będzie dowolną skończoną p-grupą. Czy z K-izomorfizmu algebr KG i KH wynika zawsze izomorfizm algebr K_0G i K_0H?*

Ja umiem tylko zastąpić nieefektywnie K przez pewne skończone podciało $F \supseteq K_0$.

3 Jednoznaczność współczynników

Teraz przejdziemy do dyskusji jednoznaczności współczynników pierścieni półgrupowych.

Problem 2 Niech X będzie interesującą dla matematyków półgrupą i A pierścieniem. Czy dla dowolnego pierścienia B mamy $AX \simeq BX \Rightarrow A \simeq B$?

Przez analogię do badania jednoznaczności grupy można by próbować ograniczyć się do X-izomorfizmów. Jednak jeśli X jest dowolną półgrupą, to dla dowolnych A, B mamy

$$AX \simeq_X BX \Rightarrow A \simeq B. \tag{2}$$

Ta obserwacja jest często wykorzystywana do znajdowania efektywnych sposobów poprawiania izomorfizmów pierścieni półgrupowych.

W trakcie badania izomorfizmów pierścieni półgrupowych tej samej półgrupy wypracowano dla dowolnej półgrupy X poniższe pojęcia. Pierścień A jest:

X-niezmienniczy jeśli dla dowolnego B mamy $AX \simeq BX \Rightarrow A \simeq B$;

silnie X-niezmienniczy jeśli dla dowolnego B i izomorfizmu $\varphi : AX \longrightarrow BX$ B-endomorfizm β BX dany wzorem $\beta(x) = \varphi(x)$ jest automorfizmem;

całkowicie X-niezmienniczy jeśli dla dowolnego B i izomorfizmu $\varphi : AX \longrightarrow BX$ mamy $\varphi(A) = B$.

Zawsze pierścień całkowicie X-niezmienniczy jest silnie X-niezmienniczy, a pierścień silnie X-niezmienniczy jest X-niezmienniczy.

Twierdzenie 2 *Niech X będzie albo półgrupą wolną o co najmniej dwu generatorach, albo grupą wolną o co najmniej dwu generatorach. Wówczas każdy przemienny pierścień zredukowany jest całkowicie X-niezmienniczy.*

Dalej skorzystamy z następującej prostej obserwacji: Jeśli A jest pierścieniem, a X, Y półgrupami, to

$$A[X \times Y] \simeq (AX)Y \tag{3}$$

Jako jeden ze skutków tego wzoru i wcześniejszych faktów mamy

Lemat 4 *Niech A będzie pierścieniem z dzieleniem, a X up-grupą. Jeśli dla pewnego pierścienia B i pewnej grupy Y mamy izomorfizm $\varphi : AX \longrightarrow BY$, to mamy rozkład $X = Z \times W$ taki, że $\varphi(AZ) = B$, oraz $W \simeq Y$.*

Szkic dowodu. AX, a więc i BY są dziedzinami. Stąd Y jest beztorsyjna. Z Lematu 3 mamy $\mathrm{U}(AX) = \mathrm{U}(A) \times X$. Dla $y \in Y$ niech

$$\varphi^{-1}(y) = \gamma(y)\delta(y) : \gamma(y) \in \mathrm{U}(A), \delta(y) \in X.$$

Przekształcenia γ i δ to homomorfizmy grup.
Niech $1 \neq y \in \mathrm{Ker}(\delta)$, czyli $1 \neq \varphi^{-1}(y) = \gamma(y) \in \mathrm{U}(A)$.
Stąd $y - 1 \in \mathrm{U}(BY)$, ale $\mathrm{o}(y) = \infty$. δ jest więc zanurzeniem Y w X i Y jest up-grupą.

Z Lematu 3 mamy więc $\mathrm{U}(BY) = \mathrm{U}(B) \times Y$. Stąd $\varphi(A) \subseteq B$, ponieważ A jest z dzieleniem.
Dla $x \in X$ niech $\varphi(x) = \alpha(x)\beta(x)$ gdzie $\alpha(x) \in \mathrm{U}(B), \beta(x) \in Y$.
Wystarczy przyjąć

$$Z = \mathrm{Ker}(\beta), \quad \text{a} \quad W = \{x \in X : \alpha(x) \in \varphi(A)\}.$$

Grupę X będziemy dalej nazywać *sztywną* jeśli dla dowolnej grupy Y mamy
$X \simeq X \times Y \Rightarrow Y = 1$.

Przykład 1 Wszystkie grupy wolne i wszystkie grupy abelowe wolne skończonej rangi są sztywnymi up-grupami.

Pytanie 7 Które (skończenie generowane) grupy relatywnie wolne są up-grupami? Które z nich są sztywne?

Podobne pytanie należy postawić dla grup beztorsyjnych mających abelowe dzielniki normalne skończonego indeksu.

Twierdzenie 3 *Niech A będzie zredukowanym pierścieniem regularnym (w sensie von Neumanna) i X up-grupą. Równoważne są warunki:*

1. *A jest X-niezmienniczy;*
2. *A jest silnie X-niezmienniczy;*
3. *A jest całkowicie X-niezmienniczy;*
4. *Grupa X jest sztywna.*

Dalej X_n to będzie wolna grupa abelowa rangi $1 \leq n < \infty$.

Twierdzenie 4 *Niech A będzie pierścieniem regularnym i zredukowanym. Wówczas A jest całkowicie X_n-niezmienniczy.*

Przykład 2 Niech X będzie wolną grupą abelową nieskończonej rangi. Wówczas żaden pierścień regularny nie jest X-niezmienniczy, ponieważ $X \simeq X \times X$, czyli $A[X] \simeq A[X \times X] \simeq (A[X])[X]$.

Jeśli natomiast X jest grupą wolną, to każdy pierścień regularny i zredukowany jest X-niezmienniczy, niezależnie od rangi X.

Przykład 3 Niech A będzie pierścieniem z dzieleniem i $N \geq 1$. Wówczas:

- A jest całkowicie X_n-niezmienniczy.
- Pierścień wielomianów $A[t]$ jest silnie X_n-niezmienniczy, ale nie jest całkowicie X_n-niezmienniczy.
- Pierścień AX_1 jest X_n-niezmienniczy, ale nie jest silnie X_n-niezmienniczy.

Trudniejsze okazało się konstruowanie pierścieni, które nie są X_n-niezmiennicze. Oto jeden z przykładów.

Przykład 4 Niech D będzie dziedziną Dedekinda z ciałem ułamków $K \subset \overline{\mathbb{Q}}$ i z ideałem I, który ma w grupie klas rząd $r = 5$, albo $r \geq 7$. Niech

$$A = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I^n t^n, \quad \text{oraz} \quad B = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I^{sn} t^n \subseteq K[t, t^{-1}] \subset K[t, t^{-1}],$$

gdzie $2 \leq s \leq r - 2$ i NWD(r,s) =1. Wtedy $AX_n \simeq BX_n$, ale $A \not\simeq B$, czyli żaden z tych pierścieni nie jest X_n-niezmienniczy.

Fakt, że wyniki o X_n-niezmienniczości wydają się niezależne od n nie jest przypadkowy. Mamy

Twierdzenie 5 *Dla pierścienia A równoważne są warunki:*

1. *A jest (silnie, całkowicie) X_1-niezmienniczy;*
2. *A jest (silnie, całkowicie) X_n-niezmienniczy dla pewnego $n \geq 1$;*
3. *A jest (silnie, całkowicie) X_n-niezmienniczy dla każdego $n \geq 1$.*

Kluczowym argumentem w dowodzie jest

Lemat 5 *Niech A będzie pierścieniem. Jeśli $AX_1 \simeq BX_2$ dla pewnego pierścienia B, to $A \simeq BX_1$.*

Pytanie 8 Niech A, B będą pierścieniami. Czy istnieje $\mathrm{n}(A, B) = n \geq 1$ takie, że

$$A[t_1, \ldots, t_n] \simeq B[t_1, \ldots, t_{n+1}] \Rightarrow A[t_1, \ldots, t_{n-1}] \simeq B[t_1, \ldots, t_n]?$$

Czy istnieje taka stała niezależna od A i B, a przynajmniej niezależna od B?

4 Przypadek afiniczny

Dalej K to ciało, a *algebra* to K-algebra, która jest przemienną dziedziną, skończenie generowaną nad K, czyli *K-algebrą afiniczną.*

Twierdzenie 6 (Wielu autorów) *Niech A będzie algebrą wymiaru Krulla co najwyżej 1. Wówczas dla dowolnej algebry B mamy*

$$A \simeq B \Leftrightarrow AX_1 \simeq BX_1 \Leftrightarrow A[t] \simeq B[t].$$

Z drugiej strony mamy

Lemat 6 *Niech K spełnia pewne dodatkowe warunki. Istnieją algebry A, B wymiaru Krulla 2 i takie, że $AX_1 \simeq BX_1$, ale $A[t] \not\simeq B[t]$.*
Istnieją też algebry A', B' takie, że $A'X_1 \not\simeq B'X_1$, ale $A'[t] \simeq B'[t]$.

Pytanie 9 Czy w lemacie wyżej K może być dowolnym ciałem? Czy można przyjąć, że algebra A' ma wymiar Krulla 2?

Przykład 5 Niech $K = \overline{K}$ będzie ciałem charakterystyki 0,

$$A - K[x, y, z]/(xy - z^2 + 1) \quad \text{i} \quad B = K[x, y, z]/(x^2y - z^2 + 1).$$

Wiadomo, że $A \not\simeq B$, ale $A[t] \simeq B[t]$.

Pytanie 10 Czy dla A, B zdefiniowanych wyżej mamy $AX_1 \simeq BX_1$?
Ogólniej: Czy istnieją algebry (pierścienie) $A \not\simeq B$ takie, że $AX_1 \simeq BX_1$ i $A[t] \simeq B[t]$?

Literatura

[1] M. Hertweck, *A counterexample to the isomorphism problem for integral group rings,* Ann. of Math. 154(2001), 115-138.

[2] E. Jespers & J. Okniński, *"Noetherian semigroup algebras",* Springer, Dordrecht 2007.

[3] J. Krempa, *Isomorphic group rings with nonisomorphic commutative coefficients*, Proc. Amer. Math. Soc. 83(1981) 459-460.

[4] J. Krempa, *Isomorphic group rings of free abelian groups,* Canad. J. Math. 34(1982) 8-16.

[5] J. Krempa, *Homomorphisms of group rings,* in: Banach Center Publications vol. 9, PWN, Warszawa 1982, pp 233-255.

[6] J. Krempa, *Coefficient rings of multidimensional torus extensions,* J. of Algebra 105(1987), 60-75.

[7] J. Okniński, *"Semigroup algebras",* Marcel Dekker Inc., New York 1991.

[8] D.S. Passman, *"The algebraic structure of group rings",* John Wiley & Sons, New York 1977.

[9] C. Polcino Milies & S.K. Sehgal, *"An introduction to group rings",* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 2002.

[10] S.K. Sehgal, *"Topics in group rings",* Marcel Dekker Inc., New York 1978.

[11] A. Strojnowski, *A note on u.p.-group,* Comm. Algebra 8(1980), 231-234.

[12] M. van den Bergh, *Group rings over Dedekind domains,* Israel J. Math. 61(1988), 295-300.

[13] A.R.P. van den Essen, *"Polynomial automorphisms and the jacobian conjecture",* Birkhäuser, Basel 2000.

[14] K.-I. Yoshida, *On the coefficient ring of a torus extension,* Osaka J. Math. 17(1980), 769-782.