Przemienne zredukowane pierścienie filialne I

Magdalena Sobolewska

Instytut Matematyki, Uniwersytet w Białymstoku

12 kwietnia 2008

Definicja

*Mówimy, że pierścień R jest **filialny**, jeżeli dla dowolnych jego podpierścieni I, J, jeżeli $I \triangleleft J$ i $J \triangleleft R$, to $I \triangleleft R$.*

[9] F. A. Szász, "Radicals of rings", Akadémiai Kiadó, Budapeszt 1981
[5] Gertrude Ehrlich, "Filial rings", "Portugaliae Mathematica", Vol.42-Frac.2-1983-1984, 185-194:

Lemat ([5], Lemma 1, (2))

Jeżeli R jest pierścieniem filialnym oraz $I \triangleleft R$, to pierścienie I oraz R/I są filialne.

Definicja

*Mówimy, że pierścień R jest **filialny**, jeżeli dla dowolnych jego podpierścieni I, J, jeżeli $I \triangleleft J$ i $J \triangleleft R$, to $I \triangleleft R$.*

[9] F. A. Szász, "Radicals of rings", Akadémiai Kiadó, Budapeszt 1981
[5] Gertrude Ehrlich, "Filial rings", "Portugaliae Mathematica", Vol.42-Frac.2-1983-1984, 185-194:

Lemat ([5], Lemma 1, (2))

Jeżeli R jest pierścieniem filialnym oraz $I \triangleleft R$, to pierścienie I oraz R/I są filialne.

Definicja

Mówimy, że pierścień R jest ***filialny****, jeżeli dla dowolnych jego podpierścieni I, J, jeżeli $I \triangleleft J$ i $J \triangleleft R$, to $I \triangleleft R$.*

[9] F. A. Szász, "Radicals of rings", Akadémiai Kiadó, Budapeszt 1981
[5] Gertrude Ehrlich, "Filial rings", "Portugaliae Mathematica", Vol.42-Frac.2-1983-1984, 185-194:

Lemat ([5], Lemma 1, (2))

Jeżeli R jest pierścieniem filialnym oraz $I \triangleleft R$, to pierścienie I oraz R/I są filialne.

Definicja

*Mówimy, że pierścień R jest **filialny**, jeżeli dla dowolnych jego podpierścieni I, J, jeżeli $I \lhd J$ i $J \lhd R$, to $I \lhd R$.*

[9] F. A. Szász, "Radicals of rings", Akadémiai Kiadó, Budapeszt 1981
[5] Gertrude Ehrlich, "Filial rings", "Portugaliae Mathematica", Vol.42-Frac.2-1983-1984, 185-194:

Lemat ([5], Lemma 1, (2))

Jeżeli R jest pierścieniem filialnym oraz $I \lhd R$, to pierścienie I oraz R/I są filialne.

Twierdzenie ([5], Theorem 4)

Przemienny pierścień R jest filialny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $a \in R$

$$\mathbb{Z} \cdot a + Ra = \mathbb{Z} \cdot a + \mathbb{Z} \cdot a^2 + Ra^2.$$

Twierdzenie ([5], Theorem 5)

Dziedzina całkowitości R jest pierścieniem filialnym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $a \in R$:

$$R = \langle 1 \rangle + Ra.$$

Twierdzenie ([5], Theorem 4)

Przemienny pierścień R jest filialny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $a \in R$

$$\mathbb{Z} \cdot a + Ra = \mathbb{Z} \cdot a + \mathbb{Z} \cdot a^2 + Ra^2.$$

Twierdzenie ([5], Theorem 5)

Dziedzina całkowitości R jest pierścieniem filialnym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $a \in R$:

$$R = \langle 1 \rangle + Ra.$$

Przykład ([5], Corollary 1)

Jeżeli R jest dziedziną całkowitości, to pierścień A wielomianów dowolnej ilości zmiennych na R nie jest filialny.

Niech x będzie jedną ze zmiennych.

Nie wprost.

$A = \langle 1 \rangle + Ax^2$.

Rozważmy element $x \in A$.

$\exists f \in A,\ n \in \mathbb{Z}$ *takie, że* $x = n \cdot 1 + f \cdot x^2$. *Sprzeczność.*

[7] M. Filipowicz, E. R. Puczyłowski, *On filial and left filial rings*, Publ. Math. Debrecen, N. **66**, 2005, No. 3-4, pp. 257-267:

Stwierdzenie ([7], Proposition 11)

Pierścień wielomianów $R[x]$ jest filialny wtedy i tylko wtedy, gdy $R^2 = 0$.

Przykład ([5], Corollary 1)

Jeżeli R jest dziedziną całkowitości, to pierścień A wielomianów dowolnej ilości zmiennych na R nie jest filialny.
Niech x będzie jedną ze zmiennych.
Nie wprost.
$A = \langle 1 \rangle + Ax^2$.
Rozważmy element $x \in A$.
$\exists f \in A,\ n \in \mathbb{Z}$ *takie, że* $x = n \cdot 1 + f \cdot x^2$. *Sprzeczność.*

[7] M. Filipowicz, E. R. Puczyłowski, *On filial and left filial rings*, Publ. Math. Debrecen, N. **66**, 2005, No. 3-4, pp. 257-267:

Stwierdzenie ([7], Proposition 11)

Pierścień wielomianów $R[x]$ jest filialny wtedy i tylko wtedy, gdy $R^2 = 0$.

Przykład ([5], Corollary 1)

Jeżeli R jest dziedziną całkowitości, to pierścień A wielomianów dowolnej ilości zmiennych na R nie jest filialny.
Niech x będzie jedną ze zmiennych.
Nie wprost.
$A = \langle 1 \rangle + Ax^2$.
Rozważmy element $x \in A$.
$\exists f \in A,\ n \in \mathbb{Z}$ *takie, że* $x = n \cdot 1 + f \cdot x^2$. *Sprzeczność.*

[7] M. Filipowicz, E. R. Puczyłowski, *On filial and left filial rings*, Publ. Math. Debrecen, N. **66**, 2005, No. 3-4, pp. 257-267:

Stwierdzenie ([7], Proposition 11)

Pierścień wielomianów $R[x]$ jest filialny wtedy i tylko wtedy, gdy $R^2 = 0$.

Przykład ([5], Corollary 1)

Jeżeli R jest dziedziną całkowitości, to pierścień A wielomianów dowolnej ilości zmiennych na R nie jest filialny.
Niech x będzie jedną ze zmiennych.
Nie wprost.
$A = \langle 1 \rangle + Ax^2$.
Rozważmy element $x \in A$.
$\exists f \in A,\ n \in \mathbb{Z}$ *takie, że* $x = n \cdot 1 + f \cdot x^2$. *Sprzeczność.*

[7] M. Filipowicz, E. R. Puczyłowski, *On filial and left filial rings*, Publ. Math. Debrecen, N. **66**, 2005, No. 3-4, pp. 257-267:

Stwierdzenie ([7], Proposition 11)

Pierścień wielomianów $R[x]$ jest filialny wtedy i tylko wtedy, gdy $R^2 = 0$.

Przykład ([5], Corollary 1)

Jeżeli R jest dziedziną całkowitości, to pierścień A wielomianów dowolnej ilości zmiennych na R nie jest filialny.
Niech x będzie jedną ze zmiennych.
Nie wprost.
$A = \langle 1 \rangle + Ax^2$.
Rozważmy element $x \in A$.
$\exists f \in A,\ n \in \mathbb{Z}$ *takie, że* $x = n \cdot 1 + f \cdot x^2$. *Sprzeczność.*

[7] M. Filipowicz, E. R. Puczyłowski, *On filial and left filial rings*, Publ. Math. Debrecen, N. **66**, 2005, No. 3-4, pp. 257-267:

Stwierdzenie ([7], Proposition 11)

Pierścień wielomianów $R[x]$ *jest filialny wtedy i tylko wtedy, gdy* $R^2 = 0$.

Przykład ([5], Corollary 1)

Jeżeli R jest dziedziną całkowitości, to pierścień A wielomianów dowolnej ilości zmiennych na R nie jest filialny.
Niech x będzie jedną ze zmiennych.
Nie wprost.
$A = \langle 1 \rangle + Ax^2$.
Rozważmy element $x \in A$.
$\exists f \in A,\ n \in \mathbb{Z}$ *takie, że* $x = n \cdot 1 + f \cdot x^2$. *Sprzeczność.*

[7] M. Filipowicz, E. R. Puczyłowski, *On filial and left filial rings*, Publ. Math. Debrecen, N. **66**, 2005, No. 3-4, pp. 257-267:

Stwierdzenie ([7], Proposition 11)

Pierścień wielomianów $R[x]$ jest filialny wtedy i tylko wtedy, gdy $R^2 = 0$.

Przykład ([5], Corollary 1)

Jeżeli R jest dziedziną całkowitości, to pierścień A wielomianów dowolnej ilości zmiennych na R nie jest filialny.
Niech x będzie jedną ze zmiennych.
Nie wprost.
$A = \langle 1 \rangle + Ax^2$.
Rozważmy element $x \in A$.
$\exists f \in A,\ n \in \mathbb{Z}$ *takie, że* $x = n \cdot 1 + f \cdot x^2$. *Sprzeczność.*

[7] M. Filipowicz, E. R. Puczyłowski, *On filial and left filial rings*, Publl. Math. Debrecen, N. **66**, 2005, No. 3-4, pp. 257-267:

Stwierdzenie ([7], Proposition 11)

Pierścień wielomianów $R[x]$ *jest filialny wtedy i tylko wtedy, gdy* $R^2 = 0$.

Stwierdzenie ([4], Proposition 1)

Przemienny pierścień R jest filialny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $a \in R$,

$$Ra = Ra^2 + \mathbb{Z}a^2 + Ra \cap \mathbb{Z}a.$$

Twierdzenie ([1], Theorem 3.1)

Dziedzina całkowitości R charakterystyki 0 jest filialna wtedy i tylko wtedy, gdy:
(i) $R = \langle 1 \rangle + R \cdot p$ dla dowolnej liczby pierwszej p oraz
(ii) dla dowolnego $a \in R$, $a \neq 0$, istnieją $m \in \mathbb{N}$ i $u \in R^*$ takie, że $a = m \cdot u$.

Stwierdzenie ([4], Proposition 1)

Przemienny pierścień R jest filialny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $a \in R$,

$$Ra = Ra^2 + \mathbb{Z}a^2 + Ra \cap \mathbb{Z}a.$$

Twierdzenie ([1], Theorem 3.1)

Dziedzina całkowitości R charakterystyki 0 jest filialna wtedy i tylko wtedy, gdy:

(i) $R = \langle 1 \rangle + R \cdot p$ dla dowolnej liczby pierwszej p oraz

(ii) dla dowolnego $a \in R$, $a \neq 0$, istnieją $m \in \mathbb{N}$ i $u \in R^*$ takie, że $a = m \cdot u$.

Stwierdzenie ([4], Proposition 1)

Przemienny pierścień R jest filialny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $a \in R$,

$$Ra = Ra^2 + \mathbb{Z}a^2 + Ra \cap \mathbb{Z}a.$$

Twierdzenie ([1], Theorem 3.1)

Dziedzina całkowitości R charakterystyki 0 jest filialna wtedy i tylko wtedy, gdy:
(i) $R = \langle 1 \rangle + R \cdot p$ dla dowolnej liczby pierwszej p oraz
(ii) dla dowolnego $a \in R$, $a \neq 0$, istnieją $m \in \mathbb{N}$ i $u \in R^*$ takie, że $a = m \cdot u$.

Stwierdzenie ([4], Proposition 1)

Przemienny pierścień R jest filialny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $a \in R$,

$$Ra = Ra^2 + \mathbb{Z}a^2 + Ra \cap \mathbb{Z}a.$$

Twierdzenie ([1], Theorem 3.1)

Dziedzina całkowitości R charakterystyki 0 jest filialna wtedy i tylko wtedy, gdy:
(i) $R = \langle 1 \rangle + R \cdot p$ dla dowolnej liczby pierwszej p oraz
(ii) dla dowolnego $a \in R$, $a \neq 0$, istnieją $m \in \mathbb{N}$ i $u \in R^*$ takie, że $a = m \cdot u$.

[1] R.R.Andruszkiewicz "The classification of integral domains in which the relation of being an ideal is transitive", Communications in Algebra, Vol.31, No.5, 2003, 2067-2093

Stwierdzenie ([1], Proposition 2.3)

Niech K będzie ciałem, które jest podpierścieniem dziedziny całkowitości R. Pierścień R jest filialny wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciałem.

Wniosek ([1], Corollary 2.4)

Jeżeli R jest filialną dziedziną całkowitości dodatniej charakterystyki, to R jest ciałem.

Stwierdzenie ([1], Proposition 2.5)

Przemienna filialna dziedzina jest ideałem pewnej filialnej dziedziny całkowitości.

Wniosek ([1], Corollary 2.6)

Przemienna dziedzina dodatniej charakterystyki jest filialna wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciałem.

Stwierdzenie ([1], Proposition 2.3)

Niech K będzie ciałem, które jest podpierścieniem dziedziny całkowitości R. Pierścień R jest filialny wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciałem.

Wniosek ([1], Corollary 2.4)

Jeżeli R jest filialną dziedziną całkowitości dodatniej charakterystyki, to R jest ciałem.

Stwierdzenie ([1], Proposition 2.5)

Przemienna filialna dziedzina jest ideałem pewnej filialnej dziedziny całkowitości.

Wniosek ([1], Corollary 2.6)

Przemienna dziedzina dodatniej charakterystyki jest filialna wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciałem.

Stwierdzenie ([1], Proposition 2.3)

Niech K będzie ciałem, które jest podpierścieniem dziedziny całkowitości R. Pierścień R jest filialny wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciałem.

Wniosek ([1], Corollary 2.4)

Jeżeli R jest filialną dziedziną całkowitości dodatniej charakterystyki, to R jest ciałem.

Stwierdzenie ([1], Proposition 2.5)

Przemienna filialna dziedzina jest ideałem pewnej filialnej dziedziny całkowitości.

Wniosek ([1], Corollary 2.6)

Przemienna dziedzina dodatniej charakterystyki jest filialna wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciałem.

Stwierdzenie ([1], Proposition 2.3)

Niech K będzie ciałem, które jest podpierścieniem dziedziny całkowitości R. Pierścień R jest filialny wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciałem.

Wniosek ([1], Corollary 2.4)

Jeżeli R jest filialną dziedziną całkowitości dodatniej charakterystyki, to R jest ciałem.

Stwierdzenie ([1], Proposition 2.5)

Przemienna filialna dziedzina jest ideałem pewnej filialnej dziedziny całkowitości.

Wniosek ([1], Corollary 2.6)

Przemienna dziedzina dodatniej charakterystyki jest filialna wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciałem.

Twierdzenie ([1], Theorem 5.1)

Skończenie generowana dziedzina całkowitości R charakterystyki 0 jest filialna wtedy i tylko wtedy, gdy R jest skończenie generowanym podpierścieniem ciała $\mathbb{Q}$.

R - dziedzina całkowitości

$$\Pi(R) = \{p \in \mathbb{P} : p \notin R^*\}$$

Stwierdzenie ([1], Proposition 3.5)

Niech R będzie filialną dziedziną całkowitości charakterystyki 0. Wtedy $\Pi(R)$ jest maksymalnym podzbiorem niestowarzyszonych elementów pierwszych w R.

Stwierdzenie ([1], Corollary 8.10)

Niech A i B będą filialnymi podpierścieniami ciała K charakterystyki 0, takimi, że A i B nie są ciałami oraz $\Pi(A) \cap \Pi(B) = \emptyset$. Wtedy $A \cap B$ jest filialnym podpierścieniem ciała K oraz $\Pi(A \cap B) = \Pi(A) \cup \Pi(B)$.

R - dziedzina całkowitości

$$\Pi(R) = \{p \in \mathbb{P} : p \notin R^*\}$$

Stwierdzenie ([1], Proposition 3.5)

Niech R będzie filialną dziedziną całkowitości charakterystyki 0. Wtedy $\Pi(R)$ jest maksymalnym podzbiorem niestowarzyszonych elementów pierwszych w R.

Stwierdzenie ([1], Corollary 8.10)

Niech A i B będą filialnymi podpierścieniami ciała K charakterystyki 0, takimi, że A i B nie są ciałami oraz $\Pi(A) \cap \Pi(B) = \emptyset$. Wtedy $A \cap B$ jest filialnym podpierścieniem ciała K oraz $\Pi(A \cap B) = \Pi(A) \cup \Pi(B)$.

R - dziedzina całkowitości

$$\Pi(R) = \{p \in \mathbb{P} : p \notin R^*\}$$

Stwierdzenie ([1], Proposition 3.5)

Niech R będzie filialną dziedziną całkowitości charakterystyki 0. Wtedy $\Pi(R)$ jest maksymalnym podzbiorem niestowarzyszonych elementów pierwszych w R.

Stwierdzenie ([1], Corollary 8.10)

Niech A i B będą filialnymi podpierścieniami ciała K charakterystyki 0, takimi, że A i B nie są ciałami oraz $\Pi(A) \cap \Pi(B) = \emptyset$. Wtedy $A \cap B$ jest filialnym podpierścieniem ciała K oraz $\Pi(A \cap B) = \Pi(A) \cup \Pi(B)$.

R - dziedzina całkowitości

$$\Pi(R) = \{p \in \mathbb{P} : p \notin R^*\}$$

Stwierdzenie ([1], Proposition 3.5)

Niech R będzie filialną dziedziną całkowitości charakterystyki 0. Wtedy $\Pi(R)$ jest maksymalnym podzbiorem niestowarzyszonych elementów pierwszych w R.

Stwierdzenie ([1], Corollary 8.10)

Niech A i B będą filialnymi podpierścieniami ciała K charakterystyki 0, takimi, że A i B nie są ciałami oraz $\Pi(A) \cap \Pi(B) = \emptyset$. Wtedy $A \cap B$ jest filialnym podpierścieniem ciała K oraz $\Pi(A \cap B) = \Pi(A) \cup \Pi(B)$.

$\mathbb{Q}_p$ - ciało liczb p-adycznych, $\mathbb{Z}_p$ - pierścień całkowitych liczb p-adycznych

Twierdzenie ([1], Theorem 6.7)

Niech R będzie filialną dziedziną całkowitości charakterystyki 0 nie będącą ciałem. Wtedy dla dowolnego $p \in \Pi(R)$ istnieje zanurzenie pierścienia R w pierścień liczb p-adycznych $\mathbb{Z}_p$.

Twierdzenie ([1], Theorem 7.1)

Dziedzina całkowitości R charakterystyki 0 jest pierścieniem filialnym takim, że $\Pi(R) = \{p\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy R jest izomorficzne z podpierścieniem pierścienia $\mathbb{Z}_p$ postaci $\mathbb{Z}_p \cap K$, gdzie K jest podciałem ciała liczb p-adycznych $\mathbb{Q}_p$.

$\mathbb{Q}_p$ - ciało liczb p-adycznych, $\mathbb{Z}_p$ - pierścień całkowitych liczb p-adycznych

Twierdzenie ([1], Theorem 6.7)

Niech R będzie filialną dziedziną całkowitości charakterystyki 0 nie będącą ciałem. Wtedy dla dowolnego $p \in \Pi(R)$ istnieje zanurzenie pierścienia R w pierścień liczb p-adycznych $\mathbb{Z}_p$.

Twierdzenie ([1], Theorem 7.1)

Dziedzina całkowitości R charakterystyki 0 jest pierścieniem filialnym takim, że $\Pi(R) = \{p\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy R jest izomorficzne z podpierścieniem pierścienia $\mathbb{Z}_p$ postaci $\mathbb{Z}_p \cap K$, gdzie K jest podciałem ciała liczb p-adycznych $\mathbb{Q}_p$.

$\emptyset \neq \Pi \subseteq \mathbb{P}$

$\mathbb{Q}_\Pi = \prod_{p\in\Pi} \mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Z}_\Pi = \prod_{p\in\Pi} \mathbb{Z}_p$.

Twierdzenie ([1], Theorem 8.8)

Niech Π będzie ustalonym niepustym podzbiorem liczb pierwszych $\mathbb{P}$. Pierścień R jest filialną dziedziną całkowitości charakterystyki 0 taką, że $\Pi(R) = \Pi$ wtedy i tylko wtedy, gdy R jest izomorficzny z podpierścieniem $\mathbb{Q}_\Pi$ postaci $K \cap \mathbb{Z}_\Pi$, gdzie K jest podciałem $\mathbb{Q}_\Pi$ takim, że dla każdego $a \in K$, $a = (a_p)_{p\in\Pi}$ mamy, że $a_p \in \mathbb{Z}_p$ dla prawie wszystkich $p \in \Pi$.

$\emptyset \neq \Pi \subseteq \mathbb{P}$
$\mathbb{Q}_\Pi = \prod_{p\in\Pi} \mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Z}_\Pi = \prod_{p\in\Pi} \mathbb{Z}_p$.

Twierdzenie ([1], Theorem 8.8)

Niech Π *będzie ustalonym niepustym podzbiorem liczb pierwszych* $\mathbb{P}$. *Pierścień* R *jest filialną dziedziną całkowitości charakterystyki 0 taką, że* $\Pi(R) = \Pi$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* R *jest izomorficzny z podpierścieniem* $\mathbb{Q}_\Pi$ *postaci* $K \cap \mathbb{Z}_\Pi$, *gdzie* K *jest podciałem* $\mathbb{Q}_\Pi$ *takim, że dla każdego* $a \in K$, $a = (a_p)_{p\in\Pi}$ *mamy, że* $a_p \in \mathbb{Z}_p$ *dla prawie wszystkich* $p \in \Pi$.

$\emptyset \neq \Pi \subseteq \mathbb{P}$
$\mathbb{Q}_\Pi = \prod_{p\in\Pi} \mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Z}_\Pi = \prod_{p\in\Pi} \mathbb{Z}_p$.

Twierdzenie ([1], Theorem 8.8)

Niech Π będzie ustalonym niepustym podzbiorem liczb pierwszych $\mathbb{P}$. Pierścień R jest filialną dziedziną całkowitości charakterystyki 0 taką, że $\Pi(R) = \Pi$ wtedy i tylko wtedy, gdy R jest izomorficzny z podpierścieniem $\mathbb{Q}_\Pi$ postaci $K \cap \mathbb{Z}_\Pi$, gdzie K jest podciałem $\mathbb{Q}_\Pi$ takim, że dla każdego $a \in K$, $a = (a_p)_{p\in\Pi}$ mamy, że $a_p \in \mathbb{Z}_p$ dla prawie wszystkich $p \in \Pi$.

Definicja

Pierścień nie posiadający niezerowych elementów nilpotentnych nazywamy pierścieniem ***zredukowanym****.*

Lemat (Charakteryzacja pierścieni zredukowanych)

Pierścień R jest zredukowany wtedy i tylko wtedy, gdy nie posiada elementu niezerowego x takiego, że $x^2 = 0$.

Twierdzenie (Andrunakievič-Rjabuhin)

Dla pierścienia R równoważne są warunki:
(i) R jest zredukowany,
(ii) istnieje niepusta rodzina ideałów $\{I_t\}_{t \in T}$ pierścienia R taka, że $\bigcap_{t \in T} I_t = \{0\}$ oraz R/I_t jest dziedziną dla każdego $t \in T$.

Definicja

*Pierścień nie posiadający niezerowych elementów nilpotentnych nazywamy pierścieniem **zredukowanym**.*

Lemat (Charakteryzacja pierścieni zredukowanych)

Pierścień R jest zredukowany wtedy i tylko wtedy, gdy nie posiada elementu niezerowego x takiego, że $x^2 = 0$.

Twierdzenie (Andrunakievič-Rjabuhin)

Dla pierścienia R równoważne są warunki:
(i) R jest zredukowany,
(ii) istnieje niepusta rodzina ideałów $\{I_t\}_{t\in T}$ pierścienia R taka, że $\bigcap\limits_{t\in T} I_t = \{0\}$ oraz R/I_t jest dziedziną dla każdego $t \in T$.

Definicja

*Pierścień nie posiadający niezerowych elementów nilpotentnych nazywamy pierścieniem **zredukowanym**.*

Lemat (Charakteryzacja pierścieni zredukowanych)

Pierścień R jest zredukowany wtedy i tylko wtedy, gdy nie posiada elementu niezerowego x takiego, że $x^2 = 0$.

Twierdzenie (Andrunakievič-Rjabuhin)

Dla pierścienia R równoważne są warunki:
(i) R jest zredukowany,
(ii) istnieje niepusta rodzina ideałów $\{I_t\}_{t \in T}$ pierścienia R taka, że $\bigcap_{t \in T} I_t = \{0\}$ oraz R/I_t jest dziedziną dla każdego $t \in T$.

[3] R. R. Andruszkiewicz, E. R. Puczyłowski, "On filial rings", "Portugaliae Mathematica", Vol.45 Frac.2-1988, 139-149:

Przykład ([3], Example 2)

Pokażemy, że pierścień $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ *nie jest filialny.*
$2\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ *oraz* $A = \{(a, a) : a \in 2\mathbb{Z}\} + 4\mathbb{Z} \oplus 4\mathbb{Z} \triangleleft 2\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z}$
$(1, 0) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ *i* $(2, 2) \in A$
$(1, 0) \cdot (2, 2) = (2, 0) \notin A$
Pierścień $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ *nie jest filialny.*

[3] R. R. Andruszkiewicz, E. R. Puczyłowski, "On filial rings", "Portugaliae Mathematica", Vol.45 Frac.2-1988, 139-149:

Przykład ([3], Example 2)

Pokażemy, że pierścień $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ nie jest filialny.
$2\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ oraz $A = \{(a, a) : a \in 2\mathbb{Z}\} + 4\mathbb{Z} \oplus 4\mathbb{Z} \triangleleft 2\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z}$
$(1, 0) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ i $(2, 2) \in A$
$(1, 0) \cdot (2, 2) = (2, 0) \notin A$
Pierścień $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ nie jest filialny.

[3] R. R. Andruszkiewicz, E. R. Puczyłowski, "On filial rings", "Portugaliae Mathematica", Vol.45 Frac.2-1988, 139-149:

Przykład ([3], Example 2)

Pokażemy, że pierścień $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ nie jest filialny.
$2\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ *oraz* $A = \{(a, a) : a \in 2\mathbb{Z}\} + 4\mathbb{Z} \oplus 4\mathbb{Z} \triangleleft 2\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z}$
$(1, 0) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ *i* $(2, 2) \in A$
$(1, 0) \cdot (2, 2) = (2, 0) \notin A$
Pierścień $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ *nie jest filialny.*

[3] R. R. Andruszkiewicz, E. R. Puczyłowski, "On filial rings", "Portugaliae Mathematica", Vol.45 Frac.2-1988, 139-149:

Przykład ([3], Example 2)

Pokażemy, że pierścień $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ nie jest filialny.
$2\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ *oraz* $A = \{(a, a) : a \in 2\mathbb{Z}\} + 4\mathbb{Z} \oplus 4\mathbb{Z} \triangleleft 2\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z}$
$(1, 0) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ *i* $(2, 2) \in A$
$(1, 0) \cdot (2, 2) = (2, 0) \notin A$
Pierścień $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ nie jest filialny.

[3] R. R. Andruszkiewicz, E. R. Puczyłowski, "On filial rings", "Portugaliae Mathematica", Vol.45 Frac.2-1988, 139-149:

Przykład ([3], Example 2)

Pokażemy, że pierścień $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ nie jest filialny.
$2\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ *oraz* $A = \{(a, a) : a \in 2\mathbb{Z}\} + 4\mathbb{Z} \oplus 4\mathbb{Z} \triangleleft 2\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z}$
$(1, 0) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ *i* $(2, 2) \in A$
$(1, 0) \cdot (2, 2) = (2, 0) \notin A$
Pierścień $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ nie jest filialny.

[3] R. R. Andruszkiewicz, E. R. Puczyłowski, "On filial rings", "Portugaliae Mathematica", Vol.45 Frac.2-1988, 139-149:

Przykład ([3], Example 2)

Pokażemy, że pierścień $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ *nie jest filialny.*
$2\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ *oraz* $A = \{(a, a) : a \in 2\mathbb{Z}\} + 4\mathbb{Z} \oplus 4\mathbb{Z} \lhd 2\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z}$
$(1, 0) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ *i* $(2, 2) \in A$
$(1, 0) \cdot (2, 2) = (2, 0) \notin A$
Pierścień $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ *nie jest filialny.*

[4] R.R. Andruszkiewicz, M. Sobolewska, "Commutative reduced filial rings", Algebra and Discrete Mathematics, N. **3** (2007), pp. 18-26

przemienny pierścień filialny

CRF-pierścień = commutative reduced filial ring.

[4] R.R. Andruszkiewicz, M. Sobolewska, "Commutative reduced filial rings", Algebra and Discrete Mathematics, N. **3** (2007), pp. 18-26

przemienny pierścień filialny

CRF-pierścień = commutative reduced filial ring.

[4] R.R. Andruszkiewicz, M. Sobolewska, "Commutative reduced filial rings", Algebra and Discrete Mathematics, N. **3** (2007), pp. 18-26

przemienny pierścień filialny

CRF-pierścień = commutative reduced filial ring.

[4] R.R. Andruszkiewicz, M. Sobolewska, "Commutative reduced filial rings", Algebra and Discrete Mathematics, N. **3** (2007), pp. 18-26

przemienny pierścień filialny

CRF-pierścień = commutative reduced filial ring.

R - pierścień beztorsyjny

$$\Pi(R) = \{p \in \mathbb{P} : pR \neq R\}$$

$S(X)$ - najmniejszy multiplikatywny podzbiór $\mathbb{N}$ zawierający $X \subseteq \mathbb{N}$

Lemat ([4], Lemma 4)

Niech A będzie niezerowym ideałem przemiennej filialnej dziedziny R charakterystyki 0. Wtedy $\Pi(A) = \Pi(R)$ oraz istnieje $t \in S(\Pi(A))$ takie, że $A = tR$.

R - pierścień beztorsyjny

$$\Pi(R) = \{p \in \mathbb{P} : pR \neq R\}$$

$S(X)$ - najmniejszy multiplikatywny podzbiór $\mathbb{N}$ zawierający $X \subseteq \mathbb{N}$

Lemat ([4], Lemma 4)

Niech A będzie niezerowym ideałem przemiennej filialnej dziedziny R charakterystyki 0. Wtedy $\Pi(A) = \Pi(R)$ oraz istnieje $t \in S(\Pi(A))$ takie, że $A = tR$.

R - pierścień beztorsyjny

$$\Pi(R) = \{p \in \mathbb{P} : pR \neq R\}$$

$S(X)$ - najmniejszy multiplikatywny podzbiór $\mathbb{N}$ zawierający $X \subseteq \mathbb{N}$

Lemat ([4], Lemma 4)

Niech A będzie niezerowym ideałem przemiennej filialnej dziedziny R charakterystyki 0. Wtedy $\Pi(A) = \Pi(R)$ oraz istnieje $t \in S(\Pi(A))$ takie, że $A = tR$.

Definicja

*Mówimy, że pierścień R jest **lewostronnie filialny**, jeżeli dla dowolnych jego podpierścieni I, J, jeżeli $I <_l J$ i $J <_l R$, to $I <_l R$.*

[6] M. Filipowicz i E.R. Puczyłowski, "Left filial rings", Algebra Colloq., N. **11**, 2004, No.3, pp. 335-344:

Definicja

*Pierścień R nazywamy **silnie regularnym**, jeżeli dla każdego $a \in R$, $a \in Ra^2$.*

$\mathbb{S}$ - klasa wszystkich pierścieni silnie regularnych
$\mathbb{S}(R)$ - silnie regularny radykał pierścienia R

Definicja

Mówimy, że pierścień R jest ***lewostronnie filialny****, jeżeli dla dowolnych jego podpierścieni I, J, jeżeli $I <_l J$ i $J <_l R$, to $I <_l R$.*

[6] M. Filipowicz i E.R. Puczyłowski, "Left filial rings", Algebra Colloq., N. **11**, 2004, No.3, pp. 335-344:

Definicja

Pierścień R nazywamy ***silnie regularnym****, jeżeli dla każdego $a \in R$, $a \in Ra^2$.*

$\mathbb{S}$ - klasa wszystkich pierścieni silnie regularnych
$\mathbb{S}(R)$ - silnie regularny radykał pierścienia R

Definicja

Mówimy, że pierścień R jest ***lewostronnie filialny****, jeżeli dla dowolnych jego podpierścieni I, J, jeżeli $I <_l J$ i $J <_l R$, to $I <_l R$.*

[6] M. Filipowicz i E.R. Puczyłowski, "Left filial rings", Algebra Colloq., N. **11**, 2004, No.3, pp. 335-344:

Definicja

Pierścień R nazywamy ***silnie regularnym****, jeżeli dla każdego $a \in R$, $a \in Ra^2$.*

$\mathbb{S}$ - klasa wszystkich pierścieni silnie regularnych
$\mathbb{S}(R)$ - silnie regularny radykał pierścienia R

Definicja

*Mówimy, że pierścień R jest **lewostronnie filialny**, jeżeli dla dowolnych jego podpierścieni I, J, jeżeli $I <_l J$ i $J <_l R$, to $I <_l R$.*

[6] M. Filipowicz i E.R. Puczyłowski, "Left filial rings", Algebra Colloq., N. **11**, 2004, No.3, pp. 335-344:

Definicja

*Pierścień R nazywamy **silnie regularnym**, jeżeli dla każdego $a \in R$, $a \in Ra^2$.*

$\mathbb{S}$ - klasa wszystkich pierścieni silnie regularnych

$\mathbb{S}(R)$ - silnie regularny radykał pierścienia R

Definicja

*Mówimy, że pierścień R jest **lewostronnie filialny**, jeżeli dla dowolnych jego podpierścieni I, J, jeżeli $I <_l J$ i $J <_l R$, to $I <_l R$.*

[6] M. Filipowicz i E.R. Puczyłowski, "Left filial rings", Algebra Colloq., N. **11**, 2004, No.3, pp. 335-344:

Definicja

*Pierścień R nazywamy **silnie regularnym**, jeżeli dla każdego $a \in R$, $a \in Ra^2$.*

$\mathbb{S}$ - klasa wszystkich pierścieni silnie regularnych
$\mathbb{S}(R)$ - silnie regularny radykał pierścienia R

Twierdzenie ([6], Theorem 3.2)

Jeżeli $I \triangleleft R$, I jest silnie regularny i R/I jest lewostronnie filialny, to R jest lewostronnie filialny.

Twierdzenie ([6], Theorem 3.4)

Niech R będzie pierścieniem. Następujące warunki są równoważne:
(i) R jest zredukowany i lewostronnie filialny,
(ii) R zawiera ideał I taki, że I jest silnie regularny i R/I jest CRF-pierścieniem,
(iii) $R/\mathbb{S}(R)$ jest CRF-pierścieniem.

Twierdzenie ([6], Theorem 3.2)

Jeżeli $I \triangleleft R$, I jest silnie regularny i R/I jest lewostronnie filialny, to R jest lewostronnie filialny.

Twierdzenie ([6], Theorem 3.4)

Niech R będzie pierścieniem. Następujące warunki są równoważne:
(i) R jest zredukowany i lewostronnie filialny,
(ii) R zawiera ideał I taki, że I jest silnie regularny i R/I jest CRF-pierścieniem,
(iii) $R/\mathbb{S}(R)$ jest CRF-pierścieniem.

Twierdzenie ([6], Theorem 3.2)

Jeżeli $I \lhd R$, I jest silnie regularny i R/I jest lewostronnie filialny, to R jest lewostronnie filialny.

Twierdzenie ([6], Theorem 3.4)

Niech R będzie pierścieniem. Następujące warunki są równoważne:
(i) R jest zredukowany i lewostronnie filialny,
(ii) R zawiera ideał I taki, że I jest silnie regularny i R/I jest CRF-pierścieniem,
(iii) $R/\mathbb{S}(R)$ jest CRF-pierścieniem.

Twierdzenie ([6], Theorem 3.2)

Jeżeli $I \lhd R$, I jest silnie regularny i R/I jest lewostronnie filialny, to R jest lewostronnie filialny.

Twierdzenie ([6], Theorem 3.4)

Niech R będzie pierścieniem. Następujące warunki są równoważne:
(i) R jest zredukowany i lewostronnie filialny,
(ii) R zawiera ideał I taki, że I jest silnie regularny i R/I jest CRF-pierścieniem,
(iii) $R/\mathbb{S}(R)$ jest CRF-pierścieniem.

Twierdzenie ([6], Theorem 3.2)

Jeżeli $I \triangleleft R$, I jest silnie regularny i R/I jest lewostronnie filialny, to R jest lewostronnie filialny.

Twierdzenie ([6], Theorem 3.4)

Niech R będzie pierścieniem. Następujące warunki są równoważne:
(i) R jest zredukowany i lewostronnie filialny,
(ii) R zawiera ideał I taki, że I jest silnie regularny i R/I jest CRF-pierścieniem,
(iii) $R/\mathbb{S}(R)$ jest CRF-pierścieniem.

Lemat ([4], Lemma 1)

Grupa addytywna każdego $\mathbb{S}$-półprostego CRF-pierścienia R jest beztorsyjna.

Dowód. Załóżmy, że R^+ nie jest beztorsyjna.
$\exists\ p \in \mathbb{P}$ i $0 \neq a \in R$ takie, że $pa = 0$.
Ra - niezerowa algebra nad ciałem p-elementowym
$Ra \lhd R$,więc Ra jest filialny
Z Theorem 4.1 z [6], [Jeżeli zredukowany lewostronnie filialny pierścień R jest algebrą nad ciałem F, to R jest silnie regularny.]:$Ra \in \mathbb{S}$
$Ra \subseteq \mathbb{S}(R) = 0 \Rightarrow Ra = 0$, sprzeczność. $\square$

Lemat ([4], Lemma 1)

Grupa addytywna każdego $\mathbb{S}$-półprostego CRF-pierścienia R jest beztorsyjna.

Dowód. Załóżmy, że R^+ nie jest beztorsyjna.

$\exists\ p \in \mathbb{P}$ i $0 \neq a \in R$ takie, że $pa = 0$.

Ra - niezerowa algebra nad ciałem p-elementowym

$Ra \lhd R$,więc Ra jest filialny

Z Theorem 4.1 z [6], [Jeżeli zredukowany lewostronnie filialny pierścień R jest algebrą nad ciałem F, to R jest silnie regularny.]:$Ra \in \mathbb{S}$

$Ra \subseteq \mathbb{S}(R) = 0 \Rightarrow Ra = 0$, sprzeczność. $\square$

Lemat ([4], Lemma 1)

Grupa addytywna każdego $\mathbb{S}$-półprostego CRF-pierścienia R jest beztorsyjna.

Dowód. Załóżmy, że R^+ nie jest beztorsyjna.
$\exists\ p \in \mathbb{P}$ i $0 \neq a \in R$ takie, że $pa = 0$.
Ra - niezerowa algebra nad ciałem p-elementowym
$Ra \lhd R$,więc Ra jest filialny
Z Theorem 4.1 z [6], [Jeżeli zredukowany lewostronnie filialny pierścień R jest algebrą nad ciałem F, to R jest silnie regularny.]:$Ra \in \mathbb{S}$
$Ra \subseteq \mathbb{S}(R) = 0 \Rightarrow Ra = 0$, sprzeczność. $\square$

Lemat ([4], Lemma 1)

Grupa addytywna każdego $\mathbb{S}$-półprostego CRF-pierścienia R jest beztorsyjna.

Dowód. Załóżmy, że R^+ nie jest beztorsyjna.
$\exists\ p \in \mathbb{P}$ i $0 \neq a \in R$ takie, że $pa = 0$.
Ra - niezerowa algebra nad ciałem p-elementowym
$Ra \lhd R$,więc Ra jest filialny
Z Theorem 4.1 z [6], [Jeżeli zredukowany lewostronnie filialny pierścień R jest algebrą nad ciałem F, to R jest silnie regularny.]:$Ra \in \mathbb{S}$
$Ra \subseteq \mathbb{S}(R) = 0 \Rightarrow Ra = 0$, sprzeczność. □

Lemat ([4], Lemma 1)

Grupa addytywna każdego $\mathbb{S}$-półprostego CRF-pierścienia R jest beztorsyjna.

Dowód. Załóżmy, że R^+ nie jest beztorsyjna.
$\exists\ p \in \mathbb{P}$ i $0 \neq a \in R$ takie, że $pa = 0$.
Ra - niezerowa algebra nad ciałem p-elementowym
$Ra \lhd R$, więc Ra jest filialny
Z Theorem 4.1 z [6], [Jeżeli zredukowany lewostronnie filialny pierścień R jest algebrą nad ciałem F, to R jest silnie regularny.]: $Ra \in \mathbb{S}$
$Ra \subseteq \mathbb{S}(R) = 0 \Rightarrow Ra = 0$, sprzeczność. $\square$

Lemat ([4], Lemma 1)

Grupa addytywna każdego $\mathbb{S}$-półprostego CRF-pierścienia R jest beztorsyjna.

Dowód. Załóżmy, że R^+ nie jest beztorsyjna.
$\exists\ p \in \mathbb{P}$ i $0 \neq a \in R$ takie, że $pa = 0$.
Ra - niezerowa algebra nad ciałem p-elementowym
$Ra \lhd R$,więc Ra jest filialny
Z Theorem 4.1 z [6], [Jeżeli zredukowany lewostronnie filialny pierścień R jest algebrą nad ciałem F, to R jest silnie regularny.]:$Ra \in \mathbb{S}$
$Ra \subseteq \mathbb{S}(R) = 0 \Rightarrow Ra = 0$, sprzeczność. □

Lemat ([4], Lemma 1)

Grupa addytywna każdego $\mathbb{S}$-półprostego CRF-pierścienia R jest beztorsyjna.

Dowód. Załóżmy, że R^+ nie jest beztorsyjna.
$\exists\ p \in \mathbb{P}$ i $0 \neq a \in R$ takie, że $pa = 0$.
Ra - niezerowa algebra nad ciałem p-elementowym
$Ra \lhd R$,więc Ra jest filialny
Z Theorem 4.1 z [6], [Jeżeli zredukowany lewostronnie filialny pierścień R jest algebrą nad ciałem F, to R jest silnie regularny.]:$Ra \in \mathbb{S}$
$Ra \subseteq \mathbb{S}(R) = 0 \Rightarrow Ra = 0$, sprzeczność. $\square$

Lemat ([4], Lemma 1)

Grupa addytywna każdego $\mathbb{S}$-półprostego CRF-pierścienia R jest beztorsyjna.

Dowód. Załóżmy, że R^+ nie jest beztorsyjna.
$\exists\ p \in \mathbb{P}$ i $0 \neq a \in R$ takie, że $pa = 0$.
Ra - niezerowa algebra nad ciałem p-elementowym
$Ra \lhd R$,więc Ra jest filialny
Z Theorem 4.1 z [6], [Jeżeli zredukowany lewostronnie filialny pierścień R jest algebrą nad ciałem F, to R jest silnie regularny.]:$Ra \in \mathbb{S}$
$Ra \subseteq \mathbb{S}(R) = 0 \Rightarrow Ra = 0$, sprzeczność. $\square$

Lemat ([4], Lemma 1)

Grupa addytywna każdego $\mathbb{S}$-półprostego CRF-pierścienia R jest beztorsyjna.

Dowód. Załóżmy, że R^+ nie jest beztorsyjna.
$\exists\ p \in \mathbb{P}$ i $0 \neq a \in R$ takie, że $pa = 0$.
Ra - niezerowa algebra nad ciałem p-elementowym
$Ra \lhd R$,więc Ra jest filialny
Z Theorem 4.1 z [6], [Jeżeli zredukowany lewostronnie filialny pierścień R jest algebrą nad ciałem F, to R jest silnie regularny.]:$Ra \in \mathbb{S}$
$Ra \subseteq \mathbb{S}(R) = 0 \Rightarrow Ra = 0$, sprzeczność. □

Lemat ([4], Lemma 1)

Grupa addytywna każdego $\mathbb{S}$-półprostego CRF-pierścienia R jest beztorsyjna.

Dowód. Załóżmy, że R^+ nie jest beztorsyjna.
$\exists\ p \in \mathbb{P}$ i $0 \neq a \in R$ takie, że $pa = 0$.
Ra - niezerowa algebra nad ciałem p-elementowym
$Ra \lhd R$,więc Ra jest filialny
Z Theorem 4.1 z [6], [Jeżeli zredukowany lewostronnie filialny pierścień R jest algebrą nad ciałem F, to R jest silnie regularny.]:$Ra \in \mathbb{S}$
$Ra \subseteq \mathbb{S}(R) = 0 \Rightarrow Ra = 0$, sprzeczność. $\square$

Twierdzenie

Klasa wszystkich CRF-pierścieni jest równa klasie wszystkich rozszerzeń przemiennych silnie regularnych pierścieni przez $\mathbb{S}$*-półproste CRF-pierścienie.*

Definicja

Powiemy, że pierścień R jest ***prawie silnie regularny****, jeżeli dla każdego $a \in R$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $na \in Ra^2$.*

$\mathbb{S}_a$ - rodzina wszystkich prawie silnie regularnych pierścieni

Twierdzenie ([4], Theorem 2)

Jeżeli R jest CRF - pierścieniem, to $R \in \mathbb{S}_a$.

R - przemienny, $R \in \mathbb{S} \Longrightarrow R$ jest *CRF*-pierścieniem $\Longrightarrow R \in \mathbb{S}_a$.

Definicja

Powiemy, że pierścień R jest ***prawie silnie regularny****, jeżeli dla każdego $a \in R$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $na \in Ra^2$.*

$\mathbb{S}_a$ - rodzina wszystkich prawie silnie regularnych pierścieni

Twierdzenie ([4], Theorem 2)

Jeżeli R jest CRF - pierścieniem, to $R \in \mathbb{S}_a$.

R - przemienny, $R \in \mathbb{S} \Longrightarrow R$ jest CRF-pierścieniem $\Longrightarrow R \in \mathbb{S}_a$.

Definicja

*Powiemy, że pierścień R jest **prawie silnie regularny**, jeżeli dla każdego $a \in R$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $na \in Ra^2$.*

$\mathbb{S}_a$ - rodzina wszystkich prawie silnie regularnych pierścieni

Twierdzenie ([4], Theorem 2)

Jeżeli R jest CRF - pierścieniem, to $R \in \mathbb{S}_a$.

R - przemienny, $R \in \mathbb{S} \Longrightarrow R$ jest *CRF*-pierścieniem $\Longrightarrow R \in \mathbb{S}_a$.

Definicja

*Powiemy, że pierścień R jest **prawie silnie regularny**, jeżeli dla każdego $a \in R$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $na \in Ra^2$.*

$\mathbb{S}_a$ - rodzina wszystkich prawie silnie regularnych pierścieni

Twierdzenie ([4], Theorem 2)

Jeżeli R jest CRF - pierścieniem, to $R \in \mathbb{S}_a$.

R - przemienny, $R \in \mathbb{S} \Longrightarrow R$ jest *CRF*-pierścieniem $\Longrightarrow R \in \mathbb{S}_a$.

Definicja

*Powiemy, że pierścień R jest **prawie silnie regularny**, jeżeli dla każdego $a \in R$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $na \in Ra^2$.*

$\mathbb{S}_a$ - rodzina wszystkich prawie silnie regularnych pierścieni

Twierdzenie ([4], Theorem 2)

Jeżeli R jest CRF - pierścieniem, to $R \in \mathbb{S}_a$.

R - przemienny, $R \in \mathbb{S} \Longrightarrow R$ jest *CRF*-pierścieniem $\Longrightarrow R \in \mathbb{S}_a$.

Definicja

*Powiemy, że pierścień R jest **prawie silnie regularny**, jeżeli dla każdego $a \in R$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $na \in Ra^2$.*

$\mathbb{S}_a$ - rodzina wszystkich prawie silnie regularnych pierścieni

Twierdzenie ([4], Theorem 2)

Jeżeli R jest CRF - pierścieniem, to $R \in \mathbb{S}_a$.

R - przemienny, $R \in \mathbb{S} \Longrightarrow R$ jest CRF-pierścieniem $\Longrightarrow R \in \mathbb{S}_a$.

R. R. Andruszkiewicz, *The classification of integral domains in which the relation of being an ideal is transitive*, Comm. Algebra, N. **31**, 2003, No. 5, pp. 2067-2093.

R. R. Andruszkiewicz, E. R. Puczyłowski, *On commutative idempotent rings*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1995, **125A**, 341-349.

R. R. Andruszkiewicz, E. R. Puczyłowski, *On filial rings*, Portugal. Math., N. **45**, 1988, No. 2, pp. 139-149.

R. R. Andruszkiewicz, M. Sobolewska, *Commutative reduced filial rings*, Algebra and Discrete Mathematics, N. **3** (2007), pp. 18-26.

G. Ehrlich, *Filial rings*, Portugal. Math., N. **42**, 1983/1984, pp. 185-194.

M. Filipowicz, E. R. Puczyłowski, *Left filial rings*, Algebra Colloq., N. **11**, 2004, No.3, pp. 335-344.

M. Filipowicz, E. R. Puczyłowski, *On filial and left filial rings*, Publ. Math. Debrecen, N. **66**, 2005, No. 3-4, pp. 257-267.

A. D. Sands, *On ideals in over-rings*, Publ. Math. Debrecen, N. **35**, 1988, pp. 273-279.

F. A. Szász, *Radicals of rings*, Akadémiai Kiadó, Budapeszt 1981.

F. A. Szász, R. Wiegant, *On the dualization of subdirect embeddings*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. **20**, 1969, pp. 289-302.

G. Tzinntzis, *An almost subidempotent radical property*, Acta Math. Hung. **49(1-2)**, 1987, pp. 173-184.

S. Veldsman, *Extensions and ideals of rings*, Publ. Math. Debrecen, N. **38**, 1991, pp. 297-309.