Grupy generowane przez mep-pary

Witold Tomaszewski
(przy współudziale Zbigniewa Szaszkowskiego i Marka Żabki)

Zakład Algebry
Instytut Matematyki
Politechnika Śląska
e-mail: Witold.Tomaszewski@polsl.pl

Oznaczenia

Niech G będzie grupą, a x, y są jej elementami. Przyjmujemy standardowe oznaczenia:

$$[x, y] = [x,_1 y] = x^{-1}y^{-1}xy$$

$$[x,_{n+1} y] = [[x,_n y], y] \text{ dla } n \geq 1$$

Definicje

Definicja (H. Heineken 2000)

Parę x, y nazywamy mep-parą jeśli istnieją liczby naturalne n, m takie, że:

$$\begin{aligned} x &= [x,_n y] \\ y &= [y,_m x] \end{aligned}$$

Jeśli n i m są minimalne o tej własności to parę x, y nazywamy (n, m)-mep-parą.

Słowo mep jest skrótem: mutually Engel periodic.

Definicja

Grupę generowaną przez mep-parę nazywamy mep-grupą.

Własności mep-grup

Proste własności:

- Jeśli G jest mep-grupą to G jest doskonała (tzn. $G = G'$)
- Jeśli x, y jest mep parą to element x jest sprzężony z xy^{-1} i y^{-1}
- Jeśli G jest rozwiązalną mep-grupą to G jest trywialna.
- Niech n będzie najmniejszą liczbą naturalną taką, że $x = [x,_n y]$. Wtedy równość $x = [x,_m y]$ zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $n|m$.
- Jeśli $x, y \in G$ jest mep-parą to dla każdego $a \in G$ para x^a, y^b też jest mep-parą. ($x^a = a^{-1}xa$)

Pytania

1. Które ze skończonych grup prostych (lub grup doskonałych) są mep-grupami?
2. Czy istnieje nieskończona mep-grupa?
3. Czy istnieje mep-para, w której (minimalne) m, n są różne?
4. Dla jakich m, n istnieje (m, n)-mep-para?

Mep-pary w grupach macierzowych

H. Heineken (2000)

W grupie $\mathrm{Sl}_2(q)$ istnieją mep-pary dla:

- pewnych liczb pierwszych q postaci $8t+1$,
- pewnych liczb pierwszych q postaci $8t+5$,
- wszystkich liczb pierwszych q takich, że q^3-q jest podzielna przez 7.
- wszystkich liczb $q=p^3$, gdzie p jest liczbą pierwszą taką, że 7 nie dzieli p^3-p.

Mep-pary w grupach alternujących A_n

- A_5 jest mep-grupą generowaną przez $(5,5)$-mep parę $x = (12345), y = (13254)$. Dla każdej mep-pary a, b w grupie A_5 istnieje c, że $a^c = (12345), b^c = (13254)$.
- A_6 nie jest mep-grupą. Każda mep-para w A_6 generuje podgrupę izomorficzną z A_5.
- A_7 jest mep-grupą i jest generowana przez $(49,49)$-mep-parę $x = (1234567), y = (1362475)$. W A_7 istnieją też $(18,18)$-mep-pary, $(16,16)$-mep-pary generujące A_7.

Mep-pary w A_n dla $5 \leq n \leq 13$, opracowanie Marek Żabka (obliczenia w języku C) i Witold Tomaszewski (uzupełnienie w programie GAP)

A_n	x, y	$(A_n : G)$	mep
A_5	$x = (1,2,3,4,5)$ $y = (1,3,5,4,2)$	1	5
A_6	$x = (1,2,3,4,5)$ $y = (2,6,5,3,4)$	6	5
A_7	$x = (1,2,3)(4,5)(6,7)$ $y = (1,4,7)(2,5)(3,6)$	1	18
A_7	$x = (1,2,3,4)(5,6)$ $y = (2,5,3,4)(6,7)$	1	16
A_7	$x = (1,2,3,4)(5,6)$ $y = (2,5,6,4)(3,7)$	15	8
A_7	$x = (1,2,3,4,5,6,7)$ $y = (1,3,6,2,4,7,5)$	1	49
A_8	$x = (1,2,3,4)(5,6,7,8)$ $y = (1,3,5,2)(4,6,8,7)$	120	8
A_9	$x = (1,2,3,4,5,6,7,8,9)$ $y = (1,4,8,6,3,9,7,2,5)$	360	18
A_{10}	$x = (1,2,3,4,5)(6,7,8,9,10)$ $y = (1,3,5,4,2)(6,8,10,9,7)$	30240	5

A_n	x, y	$(A_n : G)$	mep
A_{10}	$x = (1,2,3,4,5)(6,7,8,9,10)$ $y = (1,3,5,8,2)(4,6,10,7,9)$	1890	15
A_{10}	$x = (1,2,3,4,5,6,7,8,9)$ $y = (2,6,5,10,7,3,4,9,8)$	1	495
A_{10}	$x = (1,2,3,4,5,6,7,8,9)$ $y = (2,7,8,4,10,6,5,9,3)$	1	747
A_{11}	$x = (1,2,3,4)(5,6,7,8)(9,10,11)$ $y = (1,3,9,11)(2,5,10,8)(4,7,6)$	1	396
A_{11}	$x = (1,2,3,4,5)(6,7,8,9,10)$ $y = (2,11,5,3,4)(6,8,10,9,7)$	332640	5
A_{12}	$x = (1,2,3,4,5,6)(7,8,9,10,11,12)$ $y = (1,3,6,10,4,8)(2,7,11,5,12,9)$	2520	288
A_{12}	$x = (1,2,3,4,5,6,7)(8,9,10,11,12)$ $y = (1,3,6,2,4,7,5)(8,10,12,11,9)$	1584	245
A_{12}	$x = (1,2,3,4,5,6)(7,8,9)(10,11)$ $y = (2,6,8,5,3,7)(4,10,11)(9,12)$	2520	37
A_{12}	$x = (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)(11,12)$ $y = (1,4,11,7,10,6,9,12,2,5)(3,8)$	124740	15
A_{12}	$x = (1,2,3,4,5)(6,7,8)(9,10)(11,12)$ $y = (1,3,5,4,2)(6,9,12)(7,10)(8,11)$	1584	90

A_n	x, y	$(A_n : G)$	mep
A_{12}	$x = (1,2,3,4,5)(6,7,8)(9,10,11)$ $y = (2,6,4,8,12)(3,9,5)(7,10,11)$	1	390
A_{12}	$x = (1,2,3,4,5)(6,7,8,9)(10,11)$ $y = (1,3,5,4,2)(7,10,8,9)(11,12)$	1584	80
A_{12}	$x = (1,2,3,4,5)(6,7,8,9)(10,11)$ $y = (1,3,5,4,2)(7,10,11,9)(8,12)$	23760	40
A_{12}	$x = (1,2,3,4,5)(6,7,8,9,10)$ $y = (2,11,5,3,4)(7,12,10,8,9)$	3991680	5
A_{12}	$x = (1,2,3,4,5)(6,7,8,9,10)$ $y = (2,11,8,3,4)(5,6,7,10,12)$	124740	15
A_{12}	$x = (1,2,3,4,5,6,7,8,9)(10,11,12)$ $y = (1,4,11,9,8,7,6,3,10)(2,5,12)$	1	918
A_{13}	$x = (1,2,3,4,5)(6,7,8)(9,10)(11,12)$ $y = (2,13,5,3,4)(6,9,12)(7,10)(8,11)$	20592	90
A_{13}	$x = (1,2,3,4,5)(6,7,8,9)(10,11)$ $y = (2,12,5,3,4)(7,10,8,9)(11,13)$	20592	80
A_{13}	$x = (1,2,3,4,5)(6,7,8,9)(10,11)$ $y = (2,12,5,3,4)(7,10,11,9)(8,13)$	308880	40
A_{13}	$x = (1,2,3,4,5)(6,7,8,9)(10,11,12,13)$ $y = (1,3,5,4,2)(6,8,10,7)(9,11,13,12)$	308880	40

A_n	x, y	$(A_n : G)$	mep
A_{13}	$x = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)(9, 10, 11, 12)$ $y = (2, 5, 4, 9)(3, 8, 7, 11, 12, 6, 10, 13)$	554400	24
A_{13}	$x = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)(9, 10, 11, 12)$ $y = (2, 9, 5, 6, 11, 10, 13, 3)(4, 8, 7, 12)$	1	3130
A_{13}	$x = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)(9, 10, 11, 12)$ $y = (1, 2, 4, 9, 5, 8, 6, 11)(3, 7, 12, 13)$	554400	16

mep oznacza najmniejsze k takie, że $x = [x,_k y]$ i $y = [y,_k x]$, $(A_n : G)$ oznacza indeks grupy generowanej przez x, y w A_n.

Mep-pary w splotach grup

Twierdzenie

Przyjmijmy $x = (12345), y = (13254)$ oraz
$f = [x; 0, 0, 0, 0, 0], g = [y; 0, 0, 0, -1, 1] \in A_5 \wr Z_s$.

- Dla każdego s takiego, że $5 \nmid s$ para f, g jest mep-parą.
- Para f, g generuje komutant grupy $A_5 \wr Z_s$.
- Jeśli $s = p$ jest liczbą pierwszą i f, g jest (n, n)-mep-parą w $A_5 \wr Z_{p^k}$ to f, g jest (pn, pn)-mep-parą w $A_5 \wr Z_{p^{k+1}}$.

Wniosek

Dla każdego s takiego, że $5 \nmid s$ grupa $(A_5 \wr Z_s)'$ jest mep-grupą.

Wyniki poszukiwania mep-par w $A_5 \wr Z_s$ (Zbigniew Szaszkowski)

$$f = [x; 0, 0, 0, 0, 0], \quad g = [y; 0, 0, 0, -1, 1].$$

s	mep
2	15
3	130
4	30
5	$[f,_2 g] = [f,_{22} g]$
6	390
7	1710
8	60
9	390
10	$[f,_2 g] = [f,_{62} g]$
11	190
12	390
13	840

s	mep
14	1710
15	$[f,_2 g] = [f,_{262} g]$
16	120
17	27840
18	390
19	34290
20	$[f,_2 g] = [f,_{62} g]$
21	22230
22	570
23	279840
24	780
25	$[f,_4 g] = [f,_{24} g]$

s	mep
26	840
27	1170
28	1710
29	60970
30	$[f,_2 g] = [f,_{782} g]$
31	230880
32	240
33	2470
34	27840
35	$[f,_2 g] = [f,_{3422} g]$
36	390
37	253260
38	34290
39	10920
40	$[f,_2 g] = [f,_{62} g]$

s	mep
41	34460
42	22230
43	4620
44	570
45	$[f,_2 g] = [f,_{782} g]$
46	279840
47	
48	1560
49	11970
50	$[f,_4 g] = [f,_{64} g]$
51	361920
52	840
53	744380
54	1170
55	$[f,_2 g] = [f,_{382} g]$

Nadzieja

Najprawdopodobniej (tak wynika z analiz komputerowych) dla dowolnej liczby $m > 1$ istnieje w splocie $A_5 \wr S_m$ podgrupa G_m generowana przez $(30, 30)$-mep-parę. Dodatkowo dla różnych m i k grupy G_k i G_m nie są izomorficzne. To daje nadzieję na znalezienie nieskończonej mep-grupy.

Literatura

[1] H. Heineken, Groups generated by two mutually Engel periodoc elements, Bolletino U.M.I., (8) 3-B (2000), 461-470.

[2] P. Słanina, W. Tomaszewski, Groups generated by (near) mutually Engel periodic elements, Bolletino U.M.I., (8) 10-B (2007), 485-497.