Metryczne Podstawy Przestrzeni Aproksymacyjnych

Marcin Wolski (Lublin)

W referacie przedstawię metryczne własności podstawowych struktur informacyjnych oraz operatorów aproksymacji z teorii zbiorów przybliżonych [9, 10]. Wyniki omówione zostaną 'wewnątrz' ramy pojęciowej zaproponowanej przez P. Pagliani i M. Chakraborty [7, 8], w której systemy informacyjne reprezentowane są przez pewne struktury relacyjne, a operatory aproksymacji definiowane są jako złożenia funkcji tworzących połączenia Galois. Tę ramę dalej oznaczać będziemy przez IQ (ang. *information quanta*). Dlatego zakres pracy ograniczony jest do (A) skończonych przestrzeni aproksymacyjnych i skończonych topologicznych przestrzeni aproksymacyjnych, oraz (B) operatorów górnej i dolnej aproksymacji generowancyh przez obydwie wspomniane przestrzenie. Dla jasności tekstu w kilku miejscach przypomnimy ponownie o założeniu, że omawiane przesetrznie są skończone.

(A)

Przestrzenie aproksymacyjne oraz topologiczne przestrzenie aproksymacyjne z teorii zbiorów przybliżonych są przykładami, odpowiednio, kwantowych informacyjnych systemów relacyjnych oraz kontekstów (zwanych także systemami własnościowymi) z IQ. W tej perspektywie, topologiczna przestrzeń aproksymacyjna jest podstawową strukturą, a przestrzeń aproksymacyjna jest jej pochodną. Między tymi obydwoma typami struktur zachodzi bardzo silny związek: kategoria przestrzeni aproksymacyjncych oraz kategoria topologicznych przestrzeni aproksymayjnych są izomorficzne i możemy je utożsamiać. Każda skończona przestrzeń topologiczna jest generowna przez częściową pseudometrykę p [4]. Co więcej, skończone topologiczne przestrzenie aproksymacyjne są dokładnie skończonymi przestrzniami pseudometrycznymi [2]. Pokażemy, że dla nich pseudometryka p przyjmuje bardzo prostą postać oraz dodatkowo jest ultrapseudometryką. Wynik ten przypomina rezultat dowiedziony przez de Groot [1], głoszący, że każda metryzowalna przestrzeń ośrodkowa oraz zero-wymiarowa jest ultrapseudometryzowalna.

(B)

W drugiej części omówine zostaną operatory aproksymacji generowane przez adjunkcje pochodzące od przestrzeni aproksymacyjnych oraz topologicznych przestrzeni aproksymacyjnych. Wspomniane adjunkcje zostaną użyte do zmodyfikownia metryki Steinhausa-Marczewskiego, która mierzy odległości między zbiorami. Celem modyfikacji jest otrzymanie pseudometryk zgodnych z granulacją obiektów indukowaną przez relację nieodróżnialności. Omówimy kilka takich miar odległości. Na koniec pokażemy, że miary indukowne przez operatory górnego przybliżenia mają bliski związek z pseudometryką p wprowadzoną w części (A). Mianowicie, gdy odległość między singletonami $\{a\}$ i $\{b\}$ będziemy rozumieć jako odległość między punktami a oraz b, to wszystkie te miary są topologicznie równoważne.

Literatura

[1] De Groot, J. (1956), Non-archimedean metrics in topology, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 9, 948-953.

[2] Erne, M., Stege, K., (1991) Counting finite posets and topologies, *Order*, 8, 247—265.

[3] Erné, M., Klossowski, E., Melton, A., Strecker, G. E. (1993), A primer on Galois connections, in *Proceedings of the 1991 Summer Conference on General Topology and*

Applications in Honour of Mary Elen Rudin and Her Work, Vol. 704 of *Annals of the New York Academy of Sciences*, 103-125.

[4] Güldürdek, A., Richmond, T. (2005), Every Finite Topology is Generated by a Partial Pseudometric, *Order*, 4, Vol. 22, 415-421.

[5] Marczewski, E., Steinhaus, H. (1958), On a certain distance of sets and the corresponding distance of functions, *Colloquium Mathematicum*, Vol. VI, 319-327.

[6] Polkowski, L. (2002), *Rough Sets: Mathematical Foundations*, Advances in Soft Computing, Physica-Verlag, Heidelberg.

[7] Pagliani, P., Chakraborty, M. (2005), Information quanta and approximation spaces. I: Non-classical approximation operators, in Hu, X., Liu, Q., Skowron, A., Lin, T. S., Yager, R. R., Zhang, E. B. (Eds), *Proceedings of the IEEE International Conference on Granular Computing*, Vol. 2, IEEE, 605-610.

[8] Pagliani, P., Chakraborty, M. (2005), Information quanta and approximation spaces. II: Generalised approximation space, in Hu, X., Liu, Q., Skowron, A., Lin, T. S., Yager, R. R., Zhang, E. B. (Eds), *Proceedings of the IEEE International Conference on Granular Computing*, Vol. 2, IEEE, 611-616.

[9] Pawlak, Z. (1982), Rough sets, *Int. J. Computer and Information Sci.*, 11, 341-356.

[10] Pawlak, Z. (1991), *Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning about Data*, Kluwer Academic Publisher.

[11] Rasiowa, H. (2001), *Algebraic Models of Logics*, University of Warsaw.

[12] Vakarelov, D. (1998), Information systems, similarity and modal logics, in E. Orlowska (Ed.), *Incomplete Information: Rough Set Analysis*, 492-550, Physica-Verlag.

[13] Wolski, M. (2004), Galois Connections and Data Analysis, *Fundamenta Informaticae*, 60(1-4), 401-415.

[14] Wolski, M. (2005), Formal Concept Analysis and Rough Set Theory from the Perspective of Finite Topological Approximations, *Transactions on Rough Sets*, III, 230-243.

[15] Wolski, M. (2007), Approximation Spaces and Nearness Type Structures, *Fundamenta Informaticae* 79, IOS Press, 567-577.

[16] Wolski, M. (2008), Information Quanta and Approximation Operators: Once More around the Track, *Transactions on Rough Sets*, VIII.

[17] Yao, Y. (2001), Information granulation and rough set approximation, *International Journal of Intelligent Systems*, 16, 87—104.

Department of Logic and Methodology of Science,
Maria Curie-Skłodowska University, Poland
marcin.wolski@umcs.lublin.pl