Zadania do rozwiązania. Seria na grudzień 2006

1. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p takie, iż obie liczby $p+2$ i p^2+2p+4 są pierwsze.

2. Pokazać, iż istnieje nieskończenie wiele liczb (trójkątnych) postaci $t_n = n(n+1)/2$, gdzie $n = 1, 2, \ldots$, z których każde dwie są względnie pierwsze.

3. Uzasadnić, iż istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnch n takich, że n dzieli $2^n + 1$.

4. Niech n i k będą liczbami naturalnymi. Wykazać nierówność

$$n^{kn} \geq (n^k + n^{k-1} + \cdots + 1)^{n-1},$$

przy czym w przypadku, gdy $n > 1$ nierówność $\geq$ można zastąpić przez $>$.

5. Niech a i b będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że $a \leq b$. Pokazać następujące nierówności między średnimi:

$$a \leq \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \frac{a^2+b^2}{a+b} \leq b.$$

Kiedy symbol $\leq$ można zastąpić symbolem $<$. Odszukać inne związki liczbowe między powyższymi średnimi.

6. Pokazać, że jeśli $a, b, c > 0$ są liczbami rzeczywistymi, to

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{a+b+c}} + \frac{(a+b+c)\sqrt{a+b+c}}{\sqrt{abc}} \geq 4\sqrt{3}.$$

7. Załóżmy, że $P(x) = (x-a)^k Q(x)$, gdzie $a \neq 0$ jest liczbą rzeczywistą, k jest liczbą naturalną oraz $Q(x)$ jest niezerowym wielomianem. Uzasadnić, iż wielomian $P(x)$ ma co najmniej $k+1$ współczynników różnych od zera.

8. Dany jest trójkąt ABC, przy czym R jest promieniem okręgu opisanego na ABC. Załóżmy, że u jest promieniem okręgu przechodzącego przez wierzchołek A i stycznego do prostej BC w wierzchołku B, natomiast v jest promieniem okręgu przechodzącego przez wierzchołek A i stycznego do prostej BC w wierzchołku C. Pokazać, iż $uv = R^2$.

9. W trójkącie ABC, którego długościami boków są liczby $a = BC$, $b = AC$ i $c = AB$, na boku BC znajduje się punkt D. Długości dodatkowych odcinków są następujące: $d = AD$, $m = BD$ i $n = DC$. Pokazać następującą równość Stewarta:

$$a(d^2 + mn) = b^2 m + c^2 n.$$

Wyprowadzić wzór na długość l_a środkowej trójkąta względem boku BC.

10. Pokazać, iż w trójkącie ABC, którego długościami boków są liczby $a = BC$, $b = AC$ i $c = AB$, długość l_a dwusiecznej kąta przy wierzchołku A wyraża się wzorem:

$$l_a = \sqrt{bc(1 - (\frac{a}{b+c})^2)}.$$

11. W trójkącie ABC, którego długościami boków są liczby $a = BC$, $b = AC$ i $c = AB$, przez h_a, h_b i h_c oznaczmy wysokości, przez R i r promienie okręgów odpowiednio opisanego i wpisanego, natomiast przez r_a, r_b i r_c promienie okręgów dopisanych. Pokazać następujące równości:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

oraz

$$r_a + r_b + r_c - r = 4R.$$

Wyznaczyć pole trójkąta, którego wierzchołkami są środki okręgów dopisanych trójkąta ABC.

12. Niech n oraz $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ będą liczbami naturalnymi takimi, że $a_i \leq 2n$ dla $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Pokazać, iż istnieją $i, j = 1, 2, \ldots, n+1$, $i \neq j$ takie, że a_i dzieli a_j.