Zadania* do rozwiązania. Seria na grudzień 2006

1. Uzasadnić, iż jedyną liczbą naturalną n taką, że n dzieli $2^n - 1$, jest $n = 1$.

2. Niech a będzie liczbą naturalną taką, że $a + 1$ nie jest potęgą liczby 2. Pokazać, iż dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n liczba $a^n + 1$ jest podzielna przez n.

3. Wyznaczyć wszystkie pary liczb całkowitych m i n takie, że $2m \equiv -1 (\mathrm{mod}\ n)$ oraz $n^2 \equiv -2 (\mathrm{mod}\ m)$.

4. Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą i niech $P(x) = a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ będzie wielomianem stopnia $p - 1$ z całkowitymi współczynnikami. Załóżmy, iż p nie dzieli $P(b) - P(a)$, o ile a i b są liczbami całkowitymi takimi, że p nie dzieli $a - b$. Wykazać, że p dzieli a_{p-1}.

5. Niech j, k oraz n będą liczbami całkowitymi takimi, że $j, k \geq 0$ i $n > 0$. Uzasadnić, iż jeśli $j = n$, to

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \binom{ki}{j} = k^n,$$

natomiast, jeśli $j < n$, to powyższa suma jest równa 0.

6. Rozważmy zbiór S_n wszystkich ciągów binarnych długości n. Za pomocą opisu określamy relację równoważności na S_n: dla danego ciągu $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ równoważne z nim są ciągi $(c_n, c_{n-1} \ldots, c_1)$, $(1 - c_1, 1 - c_2, \ldots, 1 - c_n)$ oraz $(1 - c_n, 1 - c_{n-1}, \ldots, 1 - c_1)$. Relacja ta rozdziela S_n na rozłączne zbiory ciągów równoważnych. Wyznaczyć liczbę zbiorów, z których każdy składa się z ciągów równoważnych i nie zawiera żadnego ciągu polindromicznego.

7. Dla danych nieujemnych liczb rzeczywistych $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, $x_{n+1} = x_1$, pokazać, iż

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_{i+1}}{1 + x_i x_{i+1}} \geq 0.$$

8. Niech R i r oznaczają promienie okręgów odpowiednio opisanego i wpisanego trójkąta ABC. Wykazać, że odległość d między środkami okręgów opisanego i wpisanego wyraża się wzorem Eulera: $d = \sqrt{R^2 - 2rR}$.

9. Dla $i = 1, 2$, niech S_i będzie okręgiem (na płaszczyźnie) o środku O_i i promieniu R_i. Wykazać, że jeżeli $O_1 \neq O_2$, to zbiór wszystkich punktów P płaszczyzny takich, że $(d_1(P))^2 - R_1^2 = (d_2(P))^2 - R_2^2$, gdzie $d_i(P)$ oznacza odległość P od O_i, jest prostą prostopadłą do prostej O_1O_2.

10. Pokazać, iż dla dowolnej liczby naturalnej n istnieją wielomiany: $P(x)$ stopnia n oraz $Q(x)$ stopnia $n - 1$ takie, że

$$(P(x))^2 - 1 = (x^2 - 1)(Q(x))^2.$$

11. Dwaj gracze grają o czekoladki tworzące batony, przy czym długości batonów są liczbami naturalnymi, a jednostką jest długość jednej czekoladki. Na początku na stole leżą dwa batony, jeden długości n i drugi długości $n + 1$, oraz pusty koszyk. Gracze dokonują ruchów na przemian. Ruch polega na przełamaniu jednego z batonów na dwa batony tak, aby ich długości były liczbami naturalnymi, albo przeniesieniu do koszyka k batonów z których każdy ma długość k dla pewnej liczby naturalnej k. Zwycięża gracz, który wykona ostatni ruch (biorąc koszyk z zawartością). Który z graczy ma strategię zwycięską?

12. Niech m, n oraz $a_1, a_2, \ldots, a_m < n + 1$ i $b_1, b_2, \ldots, b_n < m + 1$ będą liczbami naturalnymi. Pokazać, iż istnieją takie ciągi binarne $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ i $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, przy czym w obu ciągach nie wszystkie wyrazy są zerami, że

$$a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_mc_m = b_1d_1 + b_2d_2 + \cdots + b_nd_n.$$

*Uzasadnić, iż taki sam, acz nieco ogólniejszy, fakt zachodzi, przy następującym osłabionym założeniu, mianowicie $(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)/m < n + 1$ i $(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)/n < m + 1$.

MCC Problems by Zbigniew Karno (C&C Sci. Res.)