Zadania do rozwiązania. Seria na listopad 2006

1. Niech a i b będą liczbami naturalnymi, przy czym $a \geq 2$. Pokazać, że istnieje liczba naturalna n taka, iż $a^b + 1$ dzieli $a^n + b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b = a^k$ dla pewnej liczby całkowitej $k \geq 0$.

2. Pokazać, że każda liczba naturalna n jest postaci $2^r 3^s$, gdzie r i s są liczbami całkowitymi nieujemnymi, lub jest sumą liczb takiej postaci, przy czym żaden ze składników sumy nie dzieli innego składnika.

3. Wyznaczyć wszystkie takie liczby naturalne $n, a_1, \ldots, a_n$, że $a_1 + \cdots + a_n = 5n - 4$ oraz

$$\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1.$$

4. Niech m i n będą nieparzystymi liczbami naturalnymi, przy czym n nie jest kwadratem liczby naturalnej oraz $\sqrt{n} < m + 1 < \sqrt{n} + 2$. Uzasadnić, że dla dowolnej liczby naturalnej k liczba $\lfloor (m + \sqrt{n})^{2k} + 1 \rfloor$ jest podzielna przez 2^{k+1}. (Tu $\lfloor x \rfloor$ oznacza - "podłogę" liczby x - największą liczbę całkowitą nie przekraczającą x.)

5. Wyznaczyć wszystkie złożone liczby naturalne n, dla których możliwe jest rozmieszczenie wszystkich większych od 1 dzielników liczby n, na okręgu w taki sposób, że dowolne dwa sąsiednie dzielniki nie są względnie pierwsze.

6. Dla danych liczb naturalnych m i n oznaczmy przez $t(m, n)$ liczbę wszystkich możliwych ciągów $a_1, a_2, \ldots, a_n$, złożonych z liczb całkowitych takich, że $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \leq m$. Pokazać, że $t(m, n) = t(n, m)$.

7. Niech k i n będą liczbami naturalnymi oraz $k \leq n$. Wyznaczyć liczbę wszystkich permutacji $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, w których ciąg $1, 2, \ldots, k$ występuje jako podciąg, natomiast ciąg $1, 2, \ldots, k, k + 1$ już nie występuje jako podciąg.

8. Niech O oznacza środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC i niech D oznacza punkt styczności tego okręgu z bokiem BC. Nadto niech E będzie (różnym od O) punktem przecięcia prostej przechodzącej przez punkty O i D z okręgiem przechodzącym przez punkty B, O i C. Uzasadnić, że

$$DE = \frac{S}{p - a},$$

gdzie S jest polem trójkąta ABC, $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ oraz $p = (a + b + c)/2$.

9. Dla trójkąta ABC niech $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ oraz $p = (a + b + c)/2$, a nadto niech r_a, r_b i r_c oznaczają promienie okręgów dopisanych stycznych odpowiednio do boków BC, AC i AB. Pokazać równość

$$p^2 = r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a.$$

10. Znaleźć taką najmniejszą stałą rzeczywistą C, że jeśli $n \geq 1$ oraz $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, to

$$\frac{1}{\frac{1}{a_1}} + \frac{2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}} + \frac{3}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}} + \cdots + \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq C \cdot (a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

11. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ będą rzeczywiste. Uzasadnić, że

$$\frac{1}{n} \cdot (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} \leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\sqrt{a_i} - \sqrt{a_j})^2.$$

12. Rozważmy szachownicę wymiaru $n \times 3$, której pola - właściwie ich środki - oznaczono parami liczb zbioru $S = \{(a, b) : a = 1, 2, \ldots, n, b = 1, 2, 3\}$. Przez drogę (wieży) na szachownicy S rozumiemy wieloboczną łamaną utworzoną z odcinków łączących punkty $p_1, p_2, \ldots, p_{3n}$ koleino w taki sposób, że: $(*)$ $p_i \in S$; $(**)$ p_i oraz p_{i+1} są w jednostkowej odległości, dla $1 \leq i < 3n$; $(***)$ dla każdego $p \in S$ istnieje dokładnie jedno i takie że $p = p_i$. Wyznaczyć liczbę wszystkich dróg rozpoczynających się w punkcie $(1, 1)$ i kończących się w punkcie $(n, 1)$.