Zadania do rozwiązania. Seria na marzec 2007

1. Niech $n \geq 4$ będzie liczbą naturalną. Pokazać, iż liczba n^2 ma w rozwinięciu dziesiętnym co najmniej jedną liczbę parzystą.

2. Pokazać, iż istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych, z których każdą nie można przedstawić ani w postaci sumy kwadratu liczby pierwszej i kwadratu liczby naturalnej, ani w postaci sumy liczby pierwszej i kwadratu liczby naturalnej.

3. Niech a, b, k i m będą liczbami naturalnymi. Załóżmy, że w ciągu arytmetycznym postaci $an + b$ jeden z wyrazów jest k-tą potęgą pewnej liczby naturalnej. Wykazać, iż istnieje nieskończenie wiele wartości n, dla których $an + b$ jest sumą m k-tych potęg pewnych liczb naturalnych.

4. Niech $n \geq 2$ będzie liczbą naturalną. Rozważmy wszystkie dzielniki $1 = d_1 < d_2 < \cdots d_k = n$ liczby n. Pokazać, iż $d_1d_2 + d_2d_3 + \cdots + d_{k-1}d_k < n^2$. Wyznaczyć wszystkie takie liczby n, że $d_1d_2 + d_2d_3 + \cdots + d_{k-1}d_k$ jest dzielnikiem n^2.

5. Pokazać, iż jeśli $n > 1$ jest liczbą naturalną, to liczba $n^4 + 4^n$ nigdy nie może być liczbą pierwszą.

6. Udowodnić, iż w trójkącie prostokątnym, w którym długości boków są liczbami naturalnymi, co najwyżej jedna dwusieczna ma długość będącą liczbą naturalną.

7. Niech a, b i c oznaczają długości boków trójkąta. Pokazać nierówność
$$\frac{13}{27}(a+b+c)^3 \leq (a^2+b^2+c^2)(a+b+c) + 4abc < \frac{1}{2}(a+b+c)^3.$$

8. Rozważmy czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg, którego przekątne AC i BD przecinają się pod kątem prostym w punkcie P. Pokazać, że dowolna prosta przechodząca przez punkt P i prostopadła do jednego z boków czworokąta $ABCD$, przecina przeciwległy bok tego czworokąta dokładnie w jego środku.

9. Do trójkąta ABC dopisano okrąg styczny do boku AB w punkcie E. Niech M będzie środkiem boku AB, natomiast I środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Pokazać, że czworokąt $EMIC$ jest trapezem, o ile $M \neq E$.

10. Sześcian, którego długość krawędzi jest równa a, przecięto płaszczyzną w taki sposób, iż przekrój jest sześciokątem foremnym. Obliczyć stosunek promienia okręgu opisanego do promienia okręgu wpisanego tego sześciokąta.

11. W czworościanie $ABCD$ rozważmy odcinki AI_A, BI_B, CI_C i DI_D, z których każdy łączy dany wierzchołek czworościanu ze środkiem okręgu wpisanego w ścianę do niego przeciwległą. Wykazać, że jeśli odcinki AI_A i BI_B przecinają się, to również odcinki CI_C i DI_D przecinają się.

12. W prostokątnej tablicy posiadającej m wierszy i n kolumn, na jej mn polach ustawiono liczby zbioru $\{1, 2, \ldots, mn-1, mn\}$, każdą na oddzielnym polu, w taki sposób, iż zachodzi własność: $(*)$ liczby każdego wiersza, przeglądane z lewa na prawo, tworzą ciąg rosnący. Czy można tak przestawić liczby w każdej z kolumn aby, przeglądane z góry do dołu, tworzyły ciąg rosnący, a jednocześnie własność $(*)$ była zachowana?