Zadania* do rozwiązania. Seria na marzec 2007

1. Niech p będzie liczbą pierwszą, natomiast k liczbą naturalną. Uzasadnić, iż $1^k + 2^k + \cdots + p^k \equiv -1 \pmod{p}$, o ile $p-1$ dzieli k; oraz $1^k + 2^k + \cdots + p^k \equiv 0 \pmod{p}$, o ile $p-1$ nie dzieli k.

2. Niech $k \geq 2$ i niech $a_1, a_2, \ldots, a_k$ będą parami względnie pierwszymi liczbami naturalnymi. Przyjmujemy $c = (k-1)a_1a_2\cdots a_k - b_1 - b_2 - \cdots - b_k$, gdzie $b_i = a_1a_2\cdots a_k/a_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$. Uzasadnić, iż dla dowolnej liczby naturalnej n tylko jedna z liczb, n bądź $c - n$, może być przedstawiona w postaci sumy $d_1b_1 + d_2b_2 + \cdots + d_kb_k$, dla pewnych nieujemnych liczb całkowitych $d_1, d_2, \ldots, d_k$.

3. Rozważmy wielomian $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, który ma n różnych ujemnych pierwiastków rzeczywistych, gdzie $n \geq 2$. Pokazać, iż $a_1(a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 + 1) > 2n^2a_0$.

4. Niech k, n i r będą liczbami naturalnymi takimi, że $k^r < n < (k+1)^r$. Uzasadnić, iż liczba $\sqrt[r]{n}$ jest niewymierna.

5. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje ciągłe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość: $(f(x)f(y))^2 = f(x-y)f(x+y)$.

6. Niech a, b i c oznaczają długości boków trójkąta, natomiast niech α, β i γ oznaczają odpowiednie kąty. Pokazać nierówność
$$\frac{9}{a+b+c} \leq \frac{b+c}{a^2}\cos\alpha + \frac{c+a}{b^2}\cos\beta + \frac{a+b}{c^2}\cos\gamma.$$

7. W trójkąt równoramienny ABC taki, iż $AB = AC$, wpisano okrąg S. Okrąg S jest styczny do boków BC, AB i AC odpowiednio w punktach D, E i F. Niech G będzie punktem przecięcia (różnym od E) okręgu S i prostej CE, natomiast H punktem przecięcia prostych FG i BC. Pokazać, że H jest środkiem odcinka CD.

8. Rozważmy czworokąt dwuśrodkowy $ABCD$, tzn. w który można wpisać okrąg i na którym można opisać okrąg. Niech E, F, G i H będą punktami styczności okręgu wpisanego z bokami odpowiednio AB, BC, CD i DA. Pokazać, że proste EG i FH są prostopadłe.

9. Dwa trójkąty ABC i DEF leżą na płaszczyźnie w taki sposób, iż A jest środkiem boku EF trójkąta DEF i D jest środkiem boku BC trójkąta ABC oraz prosta EF jest dwusieczną kąta $\angle CAB$ trójkąta ABC i prosta CB jest dwusieczną kąta $\angle EDF$ trójkąta DEF. Pokazać, że $AB + AC = DE + DF$.

10. Niech punkty D, E i F będą środkami boków odpowiednio AB, BC i CA trójkąta ABC. Pokazać, że okrąg przechodzący przez punkty D, E i F jest styczny do okręgu wpisanego w trójkąt ABC i jednocześnie styczny do wszystkich okręgów dopisanych do trójkąta ABC.

11. Kolorujemy każdy z punktów (3-wymiarowej) przestrzeni albo na niebiesko albo na zielono w dowolny sposób. Załóżmy, że każdy kwadrat jednostkowy ma co najmniej jeden wierzchołek zielony. Uzasadnić, iż istnieje kwadrat jednostkowy z co najmniej trzema wierzchołkami zielonymi.

12. Spotkały się trzy grupy osób, z których każda liczy $n \geq 1$ osób. Wiadomo, że każda osoba z dowolnej grupy zna co najmniej $n+1$ osób pośród $2n$ osób z grup do których sama nie należy. Pokazać, iż znajdą się trzy osoby, każda z innej grupy, znające się wzajemnie.

---

* MCC Problems by Zbigniew Karno (C&C Sci. Res.)