Seria na grudzień 2003 ("młodsi")

Zadanie 1. Na każdym polu nieskończonej szachownicy napisano liczbę całkowitą, przy czym każda napisana liczba występuje na szachownicy tylko raz. Dowieść, że dla dowolnej liczby rzeczywistej a istnieją takie dwa sąsiednie pola szachownicy, że różnica liczb napisanych na tych polach jest większa niż a.

Zadanie 2. W czworokącie wypukłym $ABCD$ wpisanym w okrąg $\angle ACB = 2\angle CAD$ oraz $\angle ACD = 2\angle BAC$. Dowieść, że $CB + CD = AC$.

Zadanie 3. Wszystkie liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 200\}$ połączono w pary

$$(a_1, b_1),\ (a_2, b_2),\ \ldots,\ (a_{100}, b_{100})$$

w taki sposób, że każda z liczb $|a_i - b_i|$ jest równa 1 lub 6. Wyznaczyć wszystkie możliwe reszty z dzielenia przez 10 liczby

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_{100} - b_{100}|$$

.

Zadanie 4. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczba $\left[\frac{10^p}{p}\right]$ jest podzielna przez 10 ($[x]$ oznacza część całkowitą liczby x)?

Zadanie 5. Dla jakich liczb naturalnych n istnieją liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant -1$, spełniające następujące równości:
(a) $x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 = 0$,
(b) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n/3$?

Zadanie 6. Dane są liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$, każda równa -1 lub 1 oraz

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0.$$

Udowodnić, że n dzieli się przez 4.

Zadanie 7. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n dla których

$$\frac{19n + 7}{7n + 11}$$

jest liczbą całkowitą.

Zadanie 8. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p dla których $2p + 1$ oraz $4p + 1$ są również liczbami pierwszymi.

Zadanie 9. Wykazać, że najmniejsza wspólna wielokrotność liczb $1, 2, 3, \ldots, 2n$ jest równa najmniejszej wszpólnej wielokrotności liczb $n + 1, n + 2, \ldots, 2n$.

Zadanie 10. Wykazać, że jeśli s jest liczbą wszystkich dzielników liczby naturalnej n, to iloczyn wszystkich dzielników jest równy $\sqrt{n^s}$.

Zadanie 11. Wykazać, że jeśli S jest średnią arytmetyczną wszystkich dzielników liczby liczby naturalnej n, to

$$\sqrt{n} \leqslant S \leqslant \frac{n+1}{2}.$$

Zadanie 12. W każde pole kwadratowej tablicy 25×25 wpisano liczbę -1 lub 1. Niech a_i oznacza iloczyn wszystkich liczb i-tego wiersza tablicy oraz b_j oznacza iloczyn wszystkich liczb j-tej kolumny tablicy. Wykazać, że

$$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \cdots + a_{25} + b_{25} \neq 0.$$

Zadanie 13. Obliczyć sumę

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{4}\right] + \left[\frac{n+4}{8}\right] + \cdots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] + \ldots$$

gdzie $[x]$ oznacz część całkowitą liczby x.