Seria na grudzień 2003 (grupa "STARSZYCH")

Zadanie 1. Niech n, k będą danymi liczbami naturalnymi. Wyznaczyć wszystkie układy liczb dodatnich $x_1, x_2, \dots, x_n$ spełniających warunki:

$$\begin{cases} x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k = 1 \\ (1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) = 2. \end{cases}$$

Zadanie 2. Dla ustalonej liczby naturalnej n rozwiązać równanie:

$$\sin x \sin 2x \dots \sin nx + \cos x \cos 2x \dots \cos nx = 1.$$

Zadanie 3. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej k istnieje nieskończenie wiele liczb postaci 5^n, w zapisie dziesiętnym których występuje k-kolejnych zer.

Zadanie 4. Wykazać, że jeśli $a_1, a_2, \dots, a_n$, $a_{n+1} = a_1$ są liczbami dodatnimi, to

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{a_{i+1}}\right)^n \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i+1}}{a_i}.$$

Zadanie 5. Wykazać, że jeśli n jest liczbą naturalną oraz $x \geqslant 0$, to

$$[nx] \geqslant \frac{[x]}{1} + \frac{[2x]}{2} + \dots + \frac{[nx]}{n},$$

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x.

Zadanie 6. Wyznaczyć wszystkie wartości $a_0 \in \mathbb{R}$, dla których ciąg $\{a_n\}$ zdefiniowany warunkiem $a_{n+1} = 2^n - 3a_n$, (dla $n \geqslant 0$) jest rosnący.

Zadanie 7. Niech $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ będzie układem $m = 2^n$ liczb $a_i \in \{-1, 1\}$. Definiujemy operację S warunkiem:

$$S(A) = (a_1a_2, a_2a_3, \dots, a_{m-1}a_m, a_ma_1).$$

Wykazać, że dla dowolnego układu A w ciągu: A, $S(A)$, $S(S(A))$, … istnieje układ złożony z samych jedynek.

Zadanie 9. Każda z trzech szkół ma n uczniów. Dowolny uczeń każdej szkoły ma w sumie $n+1$ znajomych wśród uczniów z dwóch pozostałych szkół. Wykazać, że z każdej szkoły można wybrać po jednym uczniu tak aby wybrana trójka składała się z osób wzajemnie znających się.

Zadanie 10. Wykazać, że dowolny trójkąt ostrokątny o polu 1 mieści się całkowicie w pewnym trójkącie prostokątnym o polu $\sqrt{3}$.

Zadanie 11. Wykazać, że pole kwadratu mieszczącego się całkowicie w pewnym trójkącie nie przekracza połowy pola tego trójkąta.

Zadanie 12. Punkty A_1, A_2, …, A_n leżą na okręgu o promieniu 1, którego środkiem jest punkt O oraz wiadomo, że

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = 0.$$

Wykazać, że dla dowolnego punktu B zachodzi nierówność

$$BA_1 + BA_2 + \dots + BA_n \geqslant n.$$

Zadanie 13. Wyznaczyć wszystkie trójkąty dla których promień okręgu opisanego jest dwukrotnie większy od promienia okręgu wpisanego.

Zadanie 14. Wykazać, że jeśli czworościan $ABCD$ ma dwie pary prostopadłych przeciwległych krawędzi, to środki wszystkich jego krawędzi leżą na jednej sferze.

Zadanie 15. Wykazać, że wewnątrz sześcianu o krawędzi a można zmieścić dwa foremne czworościany o krawędzi a każdy, tak aby nie miały one wspólnych punktów.