Seria na grudzień 2002 (grupa "MŁODSZYCH")

Zadanie 1. Na bal Sylwestrowy przybyło 200 osób. Każda osoba zna przynajmniej 100 innych, spośród przybyłych. Wykazać, że pewne cztery osoby można ustawić wokół choinki tak, że każda z nich będzie miała obok siebie swoich znajomych.

Zadanie 2. W turnieju szachowym każdy szachista połowę uzyskanych punktów zdobył w grze z zawodnikami którzy zajęli trzy ostatnie miejsca. Ilu zawodników uczestniczyło w turnieju?

Zadanie 3. Obliczyć sumę

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Zadanie 4. Dla liczby dodatniej a wyznaczyć wszystkie układy $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ złożone z liczb rzeczywistych spełniających zależności: $x_2=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right)$, $x_3=\frac{1}{2}\left(x_2+\frac{a}{x_2}\right),\ldots,$ $x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right)$, $x_1=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$.

Zadanie 5. Wewnątrz koła o polu 5 narysowano dziewięć wielokątów, każdy o polu 1 . Wykazać, że pewne dwa z tych wielokątów mają część wspólną o polu nie mniejszym niż 1/9.

Zadanie 6. Liczby $1,2,3,\ldots,k^2$ rozmieszczono w kwadratowej tablicy:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \ldots & k \\ k+1 & k+2 & \ldots & 2k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (k-1)k+1 & (k-1)k+2 & \ldots & k^2 \end{array}$$

Następnie wybrano k liczb w ten sposób, że każde dwie należą do różnych wierszy i kolumn tablicy. Wyznaczyć sumę wybranych liczb.

Zadanie 7. Niech liczby x,y,z będą takie, że $xyz=1$. Obliczyć sumę

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}.$$

Zadanie 8. Spośród liczb $1,2,3,\ldots,2n+1$ wybrano k różnych liczb w ten sposób, że żadna z nich nie jest sumą dwóch innych. Dla jakich k taki wybór jest możliwy?

Zadanie 9. Budujemy następujący ciag złożony z dodatnich liczb wymiernych:

$$\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{1}{2},\frac{3}{1},\frac{2}{2},\frac{1}{3},\frac{4}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{5}{1},\frac{4}{2},\frac{3}{3},\frac{2}{4},\frac{1}{5},\frac{6}{1},\frac{5}{2},\ldots..$$

Wykazać, że każda dodatnia liczba wymierna pojawia się w tym ciągu nieskończenie wiele razy. Kiedy najwcześniej pojawia się w tym ciągu liczba p/q, gdzie p,q są dodatnimi liczbami całkowitymi?

Zadanie 10. Czy w prostokątnym układzie współrzędnych można narysować sześciokąt foremny którego wszystkie wierzchołki mają współrzędne bedące liczbami wymiernymi?

Zadanie 11. Mieszkańcy miasta P mówią zawsze prawdę, zaś mieszkańcy miasta K zawsze kłamią. Mieszkańcy miasta P bywają w mieście K i na odwrót mieszkańcy miasta K bywają w mieście P. Pewien podróżny przybył do jednego z tych miast lecz nie wie do którego. Jakie pytanie powinien on zadać przypadkowo spotkanej osobie? (oczywiście, aby dowiedzieć się w którym z miast przebywa)

Zadanie 12. Punkty K i L dzielą boki AB i CD czworokąta $ABCD$ w stosunku $m:n$. Odcinki BL i CK przecinają się w punkcie P, a odcinki DK i AL - w punkcie Q. Wykazać, że pole czworokąta $KPLQ$ jest sumą pól trójkątów BPC oraz AQD.