Seria na grudzień 2002 (grupa "STARSZYCH")

Zadanie 1. Liczby $c_0, c_1, \ldots, c_n$ spełniają równość:
$$c_0 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3} + \cdots + \frac{c_n}{n+1} = 0.$$
Wykazać, że wielomian $w(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ ma przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

Zadanie 2. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ zależność
$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x.$$

Zadanie 3. Wykazać, że jeśli $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są różnymi liczbami naturalnymi oraz $a_i \geq 2$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$, to
$$\left(1 - \frac{1}{a_1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{a_2^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{a_n^2}\right) > \frac{1}{2}.$$

Zadanie 4. Wykazać, że nie istnieje wielomian $w(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ taki, że dla dowolnej liczby całkowitej nieujemnej m, liczba $w(m)$ jest pierwsza.

Zadanie 5. Proste $l_1, l_2, \ldots, l_n$ należą do płaszczyzny π i żadne dwie spośród nich nie są równoległe. Wykazać, że pewne dwie spośród tych prostych tworzą kąt o mierze nie większej niż $180^\circ/n$.

Zadanie 6. W okręgu o promieniu 1 narysowano pewną liczbę cięciw. Wykazać, że jeśli każda średnica okręgu przecina nie więcej niż k spośród narysowanych cięciw, to łączna suma długości cięciw jest mniejsza od $k\pi$.

Zadanie 7. Niech punkty E, F, G, H będą środkami boków AB, BC, CD, DA czworokąta $ABCD$. Wykazać, że
$$S_{ABCD} \leq EG \cdot HF \leq \frac{1}{4}(AB + CD)(AD + BC).$$

Zadanie 8. Wykazać, że każdy czworokąt o obwodzie 4 ma pole nie większe niż 1.

Zadanie 9. Wewnątrz trójkata ABC wybrano dowolny punkt M. Wykazać, że
$$S_{ABC} \leq \frac{1}{4}(AM \cdot BC + BM \cdot AC + CM \cdot AB).$$

Zadanie 10. W okrąg o promieniu R wpisano wielokąt W o polu S, zawierający środek okręgu. Na każdym boku wielokąta W wybrano po jednym punkcie. Wybrane punkty są wierzchołkami wypukłego wielokąta W_1. Wykazać, że wielokąt W_1 ma obwód nie mniejszy niż $2S/R$.

Zadanie 11. Wykazać, że jeśli wewnątrz wypukłego czworokąta $ABCD$ o polu S istnieje punkt O taki, że
$$AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 = 2S,$$
to czworokąt $ABCD$ jest kwadratem.

Zadanie 12. Wykazać, że jeśli ciąg arytmetyczny $a, a+d, a+2d, \ldots, a+nd, \ldots$ $(d \neq 0)$ zawiera podciąg będący ciągiem geometrycznym, to liczba $\frac{a}{d}$ jest wymierna.

Zadanie 13. Ciąg $\{x_n\}$ spełnia warunki: $x_1 = 5$ oraz $x_{n+1} = x_n^2 - 2$, dla $n \geq 1$. Obliczyć granicę
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$