Seria na grudzień 2007

Zadanie 1. Niech A będzie dziesięcioelementowym podzbiorem zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 50\}$. Wykaż, że A ma dwa czteroelementowe podzbiory, mające równe sumy elementów.

Zadanie 2. Załóżmy, że danych jest $n + 1$ różnych liczb ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. Udowodnić, że wśród tych liczb

(a) istnieje para liczb, których suma jest równa $2n + 1$;
(b) istnieją dwie liczby względnie pierwsze;
(c) istnieje liczba, która jest wielokrotnością innej liczby.

Zadanie 3. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n pewna jej wielokrotność ma postać 99...9000...0.

Zadanie 4. Wykaż, że jeśli dziesięć nieujemnych liczb całkowitych ma sumę 101, to muszą być wśród nich trzy, których suma wynosi co najmniej 31.

Zadanie 5. Niech A będzie podzbiorem zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 149, 150\}$ złożonym z 25 liczb. Wykaż, że istnieją dwie różne pary elementów zbioru A, mające te same same sumy.

Zadanie 6. Obliczyć pole ośmiokąta wpisanego w okrąg wiedząc, że pewne cztery kolejne jego boki mają długość 1 oraz cztery pozostałe jego boki mają długość 2.

Zadanie 7. Płaszczyznę podzielono dwiema rodzinami prostych równoległych na przystające kwadraty. Niech $\mathcal{K}_n$ będzie zbiorem złożonym z n takich kwadratów. Wykazać, że istnieje podzbiór zbioru $\mathcal{K}_n$, złożony z nie mniej niż $n/4$ kwadratów nie mających wspólnego wierzchołka.

Zadanie 8. Na płaszczyźnie poprowadzono trzy rodziny prostych równoległych. Jaka jest minimalna liczba prostych należących do tych rodzin, ab dzieliły one płaszczyznę na więcej niż 2008 obszarów?

Zadanie 9. Na płaszczyźnie z ustalonym układem współrzędnych narysowano wielokąt, którego wszystkie wierzchołki mają współrzędne całkowite. Wykazać, że podwojone pole tego wielokąta jest liczbą całkowitą.

Zadanie 10. Płaszczyznę pokryto kołami w ten sposób, że środek każdego z tych kół nie należy do żadnego innego koła. Dowieść, że każdy punkt płaszczyzny należy do co najwyżej pięciu kół.

Zadanie 11. Wykazać, że suma miar kątów płaskich przy wierzchołkach kąta trójściennego jest mniejsza od 2π.

Zadanie 12. Udowodnić, że suma miar wszystkich kątów dwuściennych dowolnego czworościanu jest większa od 2π.