Seria na grudzień 2005

Zadanie 1. Wykazać, że jeśli $a > 3$ jest liczbą całkowitą nieparzystą, to dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $a^{2^n} - 1$ ma przynajmniej $n + 1$ różnych dzielników pierwszych.

Zadanie 2. Znaleźć parę liczb naturalnych a, b takich, że
(a) liczba $ab(a + b)$ nie jest podzielna przez 7;
(b) liczba $(a + b)^7 - a^7 - b^7$ jest podzielna przez 7^7.

Zadanie 3. Znaleźć wszystkie takie pary liczb naturalnych n i p, że liczby $(n + 1)^p - n$ oraz $(n + 1)^{p+3} - n$ nie są względnie pierwsze.

Zadanie 4. Udowodnić, że istnieje taka wielokrotność liczby 5^n której zapis dziesiętny składa się z n cyfr różnych od zera.

Zadanie 5. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność:

$$x_1 x_2 \ldots x_n \leqslant \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^4}{4} + \frac{x_3^8}{8} + \cdots + \frac{x_n^{2^n}}{2^n} + \frac{1}{2^n}.$$

Zadanie 6. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość:

$$2^n \binom{n}{0} + 2^{n-1} \binom{n+1}{1} + 2^{n-2} \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{2n}{n} = 2^{2n}.$$

Zadanie 7. Ile liczb zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 1000000\}$ ma sumę cyfr równą 13?

Zadanie 8. Dane są liczby naturalne n i r, przy czym $1 \leqslant r \leqslant n$. Rozważamy wszystkie r-elementowe podzbiory zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. W każdym z tych podzbiorów wybieramy liczbę najmniejszą. Obliczyć średnią arytmetyczną tych liczb.

Zadanie 9. Na płaszczyźnie danych jest n kół pokrywających obszar o polu 1. Dowieść, że można wybrać jedno koło lub kilka kół parami rozłącznych, których suma pól jest nie mniejsza niż $1/9$.

Zadanie 10. Sześciokąt foremny o boku 1 pokryty jest sześcioma kołami o średnicy 1. Wykazać, że żaden z wierzchołków sześciokąta nie należy do dwóch z tych kół.