Seria na kwiecień 2003 (grupa "MŁODSZYCH")

Zadanie 1. Pewien uczeń przygotowując się do konkursu matematycznego, który ma się odbyć za dwa miesiące, rozwiązuje co najmniej jedno zadanie dziennie, ale nie więcej niż 10 zadań w ciągu tygodnia. Udowodnić, że znajdzie się pewna liczba kolejnych dni, w ciągu których rozwiąże dokładnie 20 zadań.

Zadanie 2. Dowieść, że na polach szachownicy wymiarów 8×8 można ustawić co najwyżej 32 skoczki tak aby żadne dwa nie szachowały sie wzajemnie.

Zadanie 3. Na ile sposobów można na polach szachownicy wymiarów 8×8 można ustawić 32 skoczki tak aby żadne dwa z nich nie szachowały się wzajemnie?

Zadanie 4. Na płaszczyźnie obrano sześć punktów tak, że żadne trzy punkty nie leżą na jednej prostej. Każde dwa punkty połączono odcinkiem i okazało się, że wszystkie odcinki mają różne długości. Udowodnić, że istnieje taki odcinek, który jest jednocześnie najkrótszym bokiem pewnego trójkąta i najdłuższym bokiem innego trójkąta o wierzchołkach w zadanym zbiorze sześciu punktów.

Zadanie 5. Udowodnić, że w każdym wielościanie wypukłym istnieją dwie ściany o tej samej liczbie boków.

Zadanie 6. Dany jest ciąg liczb całkowitych $a_1, a_2, \dots, a_n$. Dowieść, że istnieje podciąg

$$a_k, a_{k+1}, \dots, a_s \quad (1 \le s \le n)$$

kolejnych wyrazów danego ciągu, których suma jest podzielna przez n.

Zadanie 7. Dowieść, że wśród pięciu punktów płaszczyzny, spośród których żadne trzy nie leżą na jednej prostej, można wybrać cztery bedące wierzchołkami czworokata wypukłego.

Zadanie 8. Dowieść, że jeżeli dla liczb całkowitych a, b liczba $a^2 + b^2$ dzieli się przez 21, to liczba ta dzieli się przez 441.

Zadanie 9. Znaleźć największy wspólny dzielnik wszystkich liczb postaci $7^{n+2} + 8^{2n+1}$, gdzie n jest liczbą naturalną.

Zadanie 10. Iloma sposobami liczbę 2^n można przedstawić w postaci sumy czterech kwadratów dodatnich liczb całkowitych?

Zadanie 11. Znaleźć wszystkie rozwiązania w liczbach naturalnych równania: $x^3 + 3 = 4y(y+1)$.

Zadanie 12. Dowieść, że dowolna liczba naturalna może być jednoznacznie zapisana w postaci

$$a_1 1! + a_2 2! + \cdots + a_n n!,$$

gdzie $0 \le a_i < i$.

Zadanie 13. Wykazać, że każde dwa wyrazy ciągu $F_n = 2^{2^n} + 1$, $(n \ge 0)$ są liczbami względnie pierwszymi.

Zadanie 14. Czy liczba $\binom{1000}{500}$ jest podzielna przez 7?

Zadanie 15. Wewnątrz kwadratu wybrano dwa punkty i połączono je ze wszystkimi wierzchołkami. Czy można w ten sposób otrzymać podział kadratu na dziewięć części o tym samym polu?

Zadanie 16. Czy możliwy jest podział trójkąta równobocznego na 1 000 000 wypukłych wielokątów tak, aby każda prosta miała punkty wspólne z co najwyżej czterdziestoma wielokątami?

Zadanie 17. Czy możliwy jest podział trójkąta równobocznego sześcioma prostymi na części z których można złożyć siedem jednakowych trójkatów równobocznych?