

Seria na kwiecień-maj 2005

Zadanie 1. Na okręgu zaznaczono N różnych punktów. Następnie narysowano K odcinków o końcach w zaznaczonych punktach. Niech T oznacza liczbę powstałych w ten sposób trójkątów. Wykazać, że

$$T \leq \frac{(N-2)K}{3}.$$

Zadanie 2. Niech $n \geq 2$. Wykazać, że istnieje podzbiór A zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ mający co najwyżej $2\lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1$ elementów taki, że

$$\{|x - y| : x, y \in A\} = \{0, 1, \dots, n - 1\}.$$

Zadanie 3. Wyznaczyć minimalną wartość wyrażenia:

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{(x+2)^2 + (y+2)^2}$$

Zadanie 4. Wyznaczyć sumę:

$$S_n = \frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1) \cdot (2n+1)}.$$

Zadanie 5. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \\ xy = z^2. \end{cases}$$

Zadanie 6. Wykazać, że jeśli długości a, b, c boków trójkąta spełniają zależność:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c},$$

to jeden z jego kątów ma miarę 60° .

Zadanie 7. Wykazać, że w wypukłym wielokącie o polu S i obwodzie p mieści się koło o promieniu S/p .

Zadanie 8. Wielomian $W(x) = x^{11} + 6x^{10} + 5x^9 + a_8x^8 + a_7x^7 + \dots + a_1x + a_0$ ma jedenaście pierwiastków rzeczywistych. Wyznaczyć te pierwiastki, jeżeli wiadomo, że tworzą one ciąg arytmetyczny.

Zadanie 9. Współrzędne wierzchołków trójkąta ABC są liczbami całkowitymi. Wykazać, że

$$abc \geq 2R,$$

gdzie R jest długością promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC , zaś a, b, c długościami jego boków.

Zadanie 10. Wypukły wielokąt W mieści się całkowicie w kwadracie o boku długości 1. Wykazać, że pewne trzy wierzchołki tego wielokąta tworzą trójkąt o polu nie przekraczającym $8/n^2$.

Zadanie 11. Funkcja $f(x)$ jest określona na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ i spełnia warunek:

$$f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 + x$$

dla wszystkich dopuszczalnych wartości x . Wyznaczyć tę funkcję.

Zadanie 12. Środek okręgu ma współrzędne będące liczbami niewymiernymi. Czy w ten okrąg można wpisać trójkąt, którego wierzchołki mają wszystkie współrzędne będące liczbami wymiernymi?