Seria na kwiecień 2004 (grupa ”MŁODSZYCH”)

Zadanie 1. W trójkącie ostrokątnym ABC najdłuższą wysokością jest AH i ma ona długość równą długości środkowej BM. Wykazać, że kąt $\angle ABC$ ma miarę nie większą niż $60°$.

Zadanie 2. Liczba B powstała z liczby A przez przestawienie pewnych cyfr. Wykazać, że jeśli $A + B = 10^{10}$, to liczba A jest podzielna przez 10.

Zadanie 3. Czy istnieją liczby naturalne x i y takie, że $x^2 + y$ oraz $y^2 + x$ są kwadratami liczb naturalnych?

Zadanie 4. W pewnym mieście dla dowolnych trzech skrzyżowań A, B, C istnieje droga od A do B nie przechodząca przez C. Wykazać, że w tym mieście można dojechać z dowolnego skrzyżowania do dowolnego innego skrzyżowania przynajmniej dwiema nieprzecinającymi się drogami. (Przez skrzyżowanie rozumiemy miejsce w którym spotykają sie przynajmniej dwie ulice oraz zakładamy, że w mieście są przynajmniej trzy skrzyżowania)

Zadanie 5. a) Czy liczby $0, 1, 2, \ldots, 9$ można umieścić na okręgu tak aby dowolne dwie sąsiednie różniły się o 3, 4 lub 5?
b) Czy liczby $1, 2, \ldots, 13$ można umieścić na okręgu tak aby dowolne dwie sąsiednie różniły się o 3, 4 lub 5?

Zadanie 6. Wykazać, że istnieje liczba podzielna przez 5^{1000} i nie zawierająca żadnego zera w zapisie dziesiętnym.

Zadanie 7. W trójkącie ABC poprowadzono prostą przechodzącą przez środek M boku BC i środek O okregu wpisanego. Niech E oznacza punkt przecięcia prostej OM z wysokością AH. Wykazać, że odcinek AE ma długość równą długości promienia okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

Zadanie 8. Na prostej ℓ danych jest 50 odcinków. Wykazać, że prawdziwe jest przynajmniej jedno z następujących zdań:
a) pewne osiem odcinków ma punkt wspólny;
b) istnieje osiem odcinków parami rozłącznych (tzn. każde dwa spośród tych ośmiu odcinków nie mają wspólnych punktów).

Zadanie 9. Dany jest wypukły n-kąt W nie posiadający boków równoległych oraz punkt X leżący wewnątrz W. Wykazać, że przez punkt X nie można poprowadzić więcej niż n prostych dzielących wielokąt W na dwie części o równych polach.

Zadanie 10. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n i k takie, że n^n ma k cyfr oraz k^k ma n cyfr.

Zadanie 11. Na płaszczyźnie dany jest skończony zbiór wielokątów taki, że każde dwa wielokąty mają punkt wspólny. Wykazać, że istnieje prosta mająca punkty wspólne ze wszystkimi wielokątami.

Zadanie 12. Krawędzie AB, AC i AD czworościanu $ABCD$ są średnicami kul K_1, K_2 i K_3. Wykazać, że kule te pokrywają cały czworościan $ABCD$.

Zadanie 13. Wykazać, że jeśli x, y, z są parami różnymi liczbami całkowitymi, to liczba $(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5$ jest podzielna przez $5(x-y)(y-z)(z-x)$.

Zadanie 14. Pewna komisja parlamentarna odbyła 40 zebrań. W każdym zebraniu uczestniczyło dokładnie 10 członków komisji, przy czym żadne dwie osoby nie uczestniczyły razem w więcej niż jednym zebraniu. Wykazać, że w skład komisji wchodzi więcej niż 60 osób.