Seria na kwiecień 2004 (starsi)

Zadanie 1. Wykazać, że $\sin 1^\circ$ jest liczbą niewymierną.

Zadanie 2. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste x, dla których

$$\frac{1}{\cos x} \quad \text{i} \quad \frac{1}{\cos 2x}$$

są liczbami całkowitymi.

Zadanie 3. Wewnątrz kwadratu o boku długości 1 zawarty jest n-kąt wypukły o bokach długości $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Wykazać, że

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant 4.$$

Zadanie 4. Odcinki AB i CD długości 1 przecinają się w punkcie O, przy czym $\sphericalangle AOC = 60^\circ$. Udowodnić, że $AC + BD \geqslant 1$.

Zadanie 5. Wewnątrz trójkąta ABC obrano punkt M. Proste AM, BM i CM przecinają boki BC,CA i AB odpowiednio w punktach P, Q i R. Wykazać, że

$$\frac{AM}{MP} \cdot \frac{BM}{MQ} \cdot \frac{CM}{MR} \geqslant 8.$$

Zadanie 6. Prosta przechodząca przez środek ciężkości trójkąta ABC przecina jego boki AB i AC odpowiednio w punktach P i Q. Udowodnić, że

$$\frac{PB}{PA} \cdot \frac{QC}{QA} \leqslant \frac{1}{4}.$$

Zadanie 7. Udowodnij, że w każdym n-kącie wypukłym ($n \geqslant 4$) średnia arytmetyczna długości boków jest mniejsza od średniej arytmetycznej długości przekątnych.

Zadanie 8. W czworościanie $ABCD$ krawędzie AD, BD i CD są wzajemnie prostopadłe i mają długości odpowiednio a, b i c. Wykazać, że dla dowolnego punktu M, leżącego na jednym z boków trójkąta ABC, suma S odległości wierzchołków A, B i C od prostej DM spełnia nierówność

$$S \leqslant \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Zadanie 9. W pola kwadratowej szachownicy 100×100 wpisano liczby całkowite w ten sposób, że różnica liczb z każdych dwóch sąsiednich pól (tzn. mających wspólny bok) nie przekracza 20. Wykazać, że na szachownicy istnieją przynajmniej trzy pola w które wpisano tę samą liczbę.

Zadanie 10. Wykazać, że nie istnieje 3-cyfrowa liczba $\overline{abc}$ taka, że liczba

$$\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$$

jest kwadratem liczby naturalnej.

Zadanie 11. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n pewna jej wielokrotność ma zapisie dziesiętnym wyłącznie cyfry 0 i 1.

Zadanie 12. W przestrzeni danych jest 101 punktów. Wśród dowolnych 11 z nich istnieją dwa odległe od siebie o 1. Udowodnić, że istnieje kula o promieniu 1 zawierająca przynajmniej 11 punktów spośród danych.