Seria na kwiecień 2008

Zadanie 1. Dla danej liczby naturalnej n wyznaczyć liczbę liczb całkowitych x z przedziału $[1, n]$ dla których $x^3 - x$ jest podzielne przez n.

Zadanie 2. Udowodnić, że tylko dla skończenie wielu liczb naturalnych n liczba $[n^2/3]$ jest pierwsza ([x] oznacza część całkowitą liczby x).

Zadanie 3. Dowieść, że jeśli $\cos \pi x = 1/3$, to x jest liczbą niewymierną.

Zadanie 4. Niech $f(x)$ i $g(x)$ będą wielomianami tego samego stopnia o współczynnikach całkowitych. Dowieść, że jeżeli dla każdego naturalnego n liczba $f(n)$ dzieli $g(n)$, to istnieje taka liczba całkowita c, że $g(x) = cf(x)$.

Zadanie 5. Niech $f(x)$ i $g(x)$ będą wielomianami o współczynnikach całkowitych. Dowieść, że jeśli dla każdej wartości całkowitej n liczba $f(n)$ dzieli się przez liczbę $g(n)$, to $f(x) = g(x)h(x)$, gdzie $h(x)$ jest wielomianem. Pokazać na przykładzie, że współczynniki wielomianu $h(x)$ nie muszą być całkowite.

Zadanie 6. Dowieść, że dla żadnego wielomianu $f(x)$ o współczynnikach całkowitych nie może być $f(7) = 11$, $f(11) = 13$.

Zadanie 7. Dane są trzy różne liczby całkowite a, b i c. Udowodnić, że nie istnieje wielomian $w(x)$ o współczynnikach całkowitych taki, że $w(a) = b$, $w(b) = c$ i $w(c) = a$.

Zadanie 8. Dany jest wielomian $w(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$. Dowieść, że jeśli równanie $w(x) = 0$ ma cztery pierwiastki rzeczywiste, to na to żeby istniało m takie, że

$$w(x + m) = x^4 + px^2 + q,$$

potrzeba i wystarcza, aby suma dwóch pewnych pierwiastków równania $w(x) = 0$ równała się sumie pozostałych.

Zadanie 9. Udowodnić, że punkt przecięcia wysokości trójkąta ostrokątnego jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt, którego wierzchołkami są spodki wysokości danego trójkąta.

Zadanie 10. Niech X będzie punktem wewnętrznym trójkąta ABC. Dowieść, że iloczyn odległości punktu X od wierzchołków A, B, C jest co najmniej osiem razy większy od iloczynu odległości tego punktu od prostych AB, BC, CA.

Zadanie 11. Udowodnić, że jeżeli w trójkącie środek koła wpisanego, punkt przecięcia wysokości i środek koła opisanego leżą na jednej prostej, to trójkąt jest równoramienny.

Zadanie 12. W koło o promieniu 1 wpisano trójkąt o długościach boków a, b, c. Dowieść, że
(a) trójkąt ten jest ostrokątny wtedy i tylko wtedy , gdy $a^2 + b^2 + c^2 > 8$;
(b) trójkąt ten jest prostokątny wtedy i tylko wtedy , gdy $a^2 + b^2 + c^2 = 8$;
(c) trójkąt ten jest rozwartokątny wtedy i tylko wtedy , gdy $a^2 + b^2 + c^2 < 8$.