Seria na listopad 2003 (”młodsi”)

Zadanie 1. W pewnym państwie jest 101 miast posiadających bezpośrednie połączenia lotnicze między sobą. Ceny biletów na bezpośrednie połączenia są różne. Czy jest możliwe aby każde dwie podróże lotnicze wokół tego państwa (tzn. przez wszystkie miasta i kończące się w mieście startu) miały różne łączne ceny?

Zadanie 2. Wyznaczyć najmniejsze liczby postaci
(a) $|11^k - 5^l|$;
(b) $|36^k - 5^l|$;
(c) $|53^k - 37^l|$,
gdzie k i l są liczbami naturalnymi.

Zadanie 3. W kwadracie $ABCD$ punkty P i Q leżą odpowiednio na bokach AB i BC, przy czym $BP = BQ$. Niech H oznacza spodek wysokości trójkąta BPC opuszczonej z wierzchołka B na bok PC. Wykazać, że kąt $\angle DHQ$ jest prosty.

Zadanie 4. Każdy z boków danego sześciokąta wypukłego ma długość większą niż 1. Czy ten sześciokąt ma przekątną o długości większej niż 2?

Zadanie 5. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ przekątne AD, BE i CF mają długości większe niż 2. Czy pewien bok tego sześciokąta ma długość większą niż 1?

Zadanie 6. Dany jest trójkąt ABC. Na boku AC znaleźć taki punkt D (posługując się cyrklem i linijką), że trójkąt ABD ma obwód równy długości boku BC.

Zadanie 7. Niech $n > 1$ będzie liczbą naturalną. Wykazać, że równanie

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie w liczbach naturalnych x, y wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą pierwszą.

Zadanie 8. Przekątne wypukłego czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg o środku O są wzajemnie prostopadłe. Wykazać, że łamana AOC dzieli ten czworokąt na dwie części o równych polach.

Zadanie 9. Dane są liczby $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$, $b_1, b_2, \ldots, b_{10}$. Wykazać, że 100 liczb postaci $a_i + b_j$ $(1 \leq i, j \leq 10)$ można podzielić na 10 grup, po 10 liczb w każdej, tak aby sumy liczb w każdej grupie były jednakowe.

Zadanie 10. Wykazać, że nieparzystą liczbę $A = p_1 p_2 \ldots p_n$ będącą iloczynem n-różnych liczb pierwszych można przedstawić w postaci różnicy kwadratów dwóch liczb naturalnych na dokładnie 2^{n-1} sposobów.

Zadanie 11. Niech p, q będą liczbami naturalnymi takimi, że

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{1334} + \frac{1}{1335}.$$

Wykazać, że liczba p jest podzielna przez 2003.

Zadanie 12. Wykazać, że w dowolnym trójkącie ABC rzut na bok BC, średnicy okręgu opisanego prostopadej do AB, ma długość równą długości boku AC.

Zadanie 13. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste a, b, c, x, y, z spełniające równość:

$$(a + b + c)^2 = 3(ab + bc + ac - x^2 - y^2 - z^2).$$

Zadanie 14. Rozwiązać w liczbach naturalnych równanie $x + y + z = xyz$.

Zadanie 15. Wykazać, że jeśli dwie środkowe trójkąta są równe to trójkąt jest równoramienny.