Seria na listopad 2003 ("starsi")

Zadanie 1. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n \geq 3$ dla których liczba 2^{2003} jest podzielna przez
$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}.$$

Zadanie 2. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n dla których istnieją dodatnie liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniające układ
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 9 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = 1. \end{cases}$$

Zadanie 3. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje dokładnie jeden układ liczb $x_1, \ldots, x_n$ spełniających równość
$$(1 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + \cdots + (x_{n-1} - x_n)^2 + x_n^2 = \frac{1}{n+1}.$$

Zadanie 4. Wykazać, że dla dowolnych liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [0, 2]$ $(n \geq 2)$ zachodzi nierówność:
$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_i - a_j| \leq n^2.$$

Zadanie 5. Rozwiązać w liczbach naturalnych nierówność:
$$[\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + [\sqrt[3]{3}] + \cdots + [\sqrt[3]{x^3 - 1}] \leq 2003,$$
gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x.

Zadanie 6. Wykazać, że w ciąg $\{x_n\}$ określony warunkami $x_1 = 2$, $x_{n+1} = [(3/2)x_n]$ zawiera nieskończenie wiele wyrazów parzystych i nieskończenie wiele wyrazów nieparzystych.

Zadanie 7. Wyznaczyć liczbę boków wielokąta foremnego, jeżeli dla czterech kolejnych jego wierzchołków A, B, C, D zachodzi równość:
$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

Zadanie 8. W wypukłym pięciokącie A, B, C, D, E kąty przy wierzchołkach B i E są proste oraz $\angle BAC = \angle EAD$. Wykazać, że jeśli przekątne BD i CE przecinają się w punkcie O, to proste AO i BE są prostopadłe.

Zadanie 9. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ takie, że $f(1) = 2$ oraz
$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x + y) + 1,$$
dla $x, y \in \mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ oznacza zbiór liczb wymiernych).

Zadanie 10. Wykazać, że dowolna funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca jeden z warunków:
$$f(x + y) = f(x) + f(y), \qquad x, y \in \mathbb{R},$$
$$f(xy + x + y) = f(xy) + f(x) + f(y), \qquad x, y \in \mathbb{R},$$
spełnia również drugi warunek.

Zadanie 11. Wielomian $W(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + 1$ ma nieujemne współczynniki oraz n pierwiastków rzeczywistych. Wykazać, że $W(2) \geq 3^n$.

Zadanie 12. Wielomian $W(x) = ax^n - ax^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \cdots + b_{n-2}x^2 - n^2 cx + c$ ma dokładnie n dodatnich pierwiastków. Wykazać, że pierwiastki są sobie równe.

Zadanie 13. Wykazać, że dla dowolnego wielomianu $W(x) \not\equiv x$ i dla dowolnej liczbie naturalnej n wielomian
$$Q_n(x) = \underbrace{W(W(\ldots W}_{n}(x)\ldots)) - x$$
jest podzielny przez $Q_1(x) = W(x) - x$.