Seria na listopad 2004 (M)

Zadanie 1. Wykazać, że jeśli $p > 3$ oraz p, $p+r$ i $p+2r$ są liczbami pierwszymi, to liczba r jest podzielna przez 6.

Zadanie 2. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste x, y spełniające układ równań

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

Zadanie 3. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ spełniają nierówności:

$$\begin{cases} a_1 - 4a_2 + 3a_3 \geqslant 0 \\ a_2 - 4a_3 + 3a_4 \geqslant 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{98} - 4a_{99} + 3a_{100} \geqslant 0 \\ a_{99} - 4a_{100} + 3a_1 \geqslant 0 \\ a_{100} - 4a_1 + 3a_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Wiadomo, że $a_1 = 1$. Jakie wartości mogą przyjmować liczby $a_2, a_3, \ldots, a_{100}$?

Zadanie 4. Czy istnieją liczby wymierne x, y, z, t oraz liczba naturalna n takie, że

$$(x + y\sqrt{2})^{2n} + (z + t\sqrt{2})^{2n} = 5 + 4\sqrt{2} \ ?$$

Zadanie 5. Dla jakich liczb wymiernych x liczba $3x^2 - 5x + 9$ jest kwadratem liczby wymiernej?

Zadanie 6. Wykazać, że jeśli liczby rzeczywiste a, b, c spełniaja nierówności:

$$a + b + c > 0, \qquad ab + bc + ca > 0, \qquad abc > 0,$$

to te liczby są dodatnie.

Zadanie 7. Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność:

$$a^2(b + c - a) + b^2(a + c - b) + c^2(a + b - c) \leqslant 3abc.$$

Zadanie 8. Dwa okręgi są styczne wewnętrznie w punkcie P. Prosta styczna do jednego z okręgów w punkcie A przecina drugi okrag w punktach B i C. Udowodnić, że prosta PA jest dwusieczną kąta BPC.

Zadanie 9. Udowodnić, że jeśli punkt P przebiega okrąg wpisany w trójkąt ABC, to wartość wyrażenia

$$a \cdot |PA|^2 + b \cdot |PB|^2 + c \cdot |PC|^2$$

jest stała. (a, b, c są długościami boków trójkąta leżących naprzeciw wierzchołków A, B, C).

Zadanie 10. Dany jest trójkąt $A_1A_2A_3$. Na bokach A_2A_3, A_1A_3, A_1A_2 obrano odpowiednio dowolne punkty B_1, B_2 i B_3. Wykazać, trzy że symetralne odcinków A_iB_i (dla $i = 1, 2, 3$) nie przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 11. Wykazać, że jeśli liczby rzeczywiste nieujemne a, b, x, y spełniają nierówności $a^5+b^5 \leqslant 1$ i $x^5 + y^5 \leqslant 1$, to zachodzi nierówność $a^2x^3 + b^2y^3 \leqslant 1$.

Zadanie 13. Na płaszczyźnie dane jest $3n$ punktów, wśród których nie ma trzech punktów współliniowych. Dowieść, że istnieje n rozłącznych trójkątów o wierzchołkach w danych punktach.

Zadanie 14. W układzie współrzędnych XOY narysowano wielokąt wypukły, którego wszystkie wierzchołki mają współrzędne całkowite. Wykazać, że podwojone pole tego wielokąta jest liczbą całkowitą.

Zadanie 15. Płaszczyznę pokryto kołami w ten sposób, że środek każdego z tych kół nie należy do żadnego innego koła. Dowieść, że każdy punkt płaszczyzny należy do co najwyżej pięciu kół.