Seria na listopad 2004 (S)

Zadanie 1. Wykazać, że jeśli liczby naturalne m i n spełniają nierówność
$$\sqrt{7}-\frac{m}{n}>0,$$
to $\sqrt{7}-\frac{m}{n}>\frac{1}{mn}$.

Zadanie 2. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n>1$ spełniona jest nierówność
$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n<2.$$

Zadanie 3. Niech a,b,c będą długościami boków trójkata. Udowodnić, że
$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geqslant 0.$$

Zadanie 4. Udowodnić, że jeśli wielomian o współczynnikach całkowitych przyjmuje wartość 1 dla czterech różnych argumentów całkowitych, to dla żadnego argumentu całkowitego nie przyjmuje wartości -1.

Zadanie 5. Dowieść, że jeżeli $a_1,a_2,\ldots,a_n$ są różnymi liczbami całkowitymi, to wielomian
$$[(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)]^2+1$$
nie jest iloczynem dwóch wielomianów stopni dodatnich o współczynnikach całkowitych.

Zadanie 6. W czworokącie $ABCD$ wpisanym w koło prosta przechodząca przez środek boku AB i punkt przecięcia przekątnych jest prostopadła do boku CD. Udowodnić, że boki AB i CD są równoległe lub, że przekątne czworokąta są prostopadłe.

Zadanie 7. a) Na płaszczyźnie dane jest $3n$ punktów, wśród których nie ma trzech punktów współliniowych. Udowodnić, że istnieje n rozłącznych trójkątów o wierzchołkach w danych punktach.
b) W przestrzeni dany jest zbiór $3n$ punktów, z których żadne cztery nie leżą na jednej płaszczyźnie. Udowodnić, że istnieje n rozłącznych trójkątów o wierzchołkach w danych punktach.

Zadanie 8. Niech n będzie liczbą naturalną parzystą. Udowodnić, że czworokąt można podzielić na n trójkątów, których wierzchołki leżą w wierzchołkach czworokąta albo wewnątrz czworokąta, a bok każdego trójkata jest albo bokiem czworokąta, albo bokiem innego trójkąta.

Zadanie 9. W czworościanie o objętości V suma kwadratów długości wszystkich krawędzi jest równa S. Dowieść, że
$$V\leqslant\frac{S\sqrt{S}}{72\sqrt{3}}.$$

Zadanie 10. Wykazać, że jeśli wszystkie kąty dwuścienne czworościanu są ostre, to wszystkie jego ściany są trójkątami ostrokątnymi.