Seria na listopad 2005

Zadanie 1. W zapisie dziesiętnym liczby naturalnej n występują cyfry 1, 3, 7 i 9. Wykazać, że zmieniając ewentualnie porządek cyfr w liczbie n można otrzymać liczbę podzielną przez 7.

Zadanie 2. Wykazać, że tylko dla skończenie wielu liczb naturalnych n liczba $\left[\frac{n^2}{3}\right]$ jest pierwsza, gdzie $[x]$ jest największą liczbą całkowitą nie przekraczającą x.

Zadanie 3. Niech $r_k(n)$ oznacza resztę z dzielenia liczby naturalnej n przez liczbę naturalną k oraz niech $R(n) = r_1(n) + r_2(n) + \cdots + r_n(n)$. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej m zachodzi równość: $R(2^m - 1) = R(2^m)$.

Zadanie 4. Niech $f(x)$ i $g(x)$ będą wielomianami tego samego stopnia o współczynnikach całkowitych. Dowieść, że jeśli dla każdego naturalnego n liczba $f(n)$ dzieli $g(n)$, to istnieje taka liczba całkowita c, że $g(x) = cf(x)$.

Zadanie 5. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje wielomian stopnia n o współczynnikach całkowitych, który dla n wartości całkowitych argumentu przyjmuje wartości będące różnymi liczbami pierwszymi.

Zadanie 6. Udowodnić, że liczba naturalna n, która dzieli wartość wielomianu

$$f(x) = x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_k$$

dla wszystkich całkowitych x, dzieli $k!$.

Zadanie 7. Rozłożyć na czynniki możliwie najniższego stopnia:
(a) $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$;
(b) $2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2x^2z^2 - x^4 - y^4 - z^4$.

Zadanie 8. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite m dla których wielomian

$$x^3 - mx^2 + mx - (m^2 + 1)$$

ma pierwiastek całkowity.

Zadanie 9. W koło o promieniu 1 wpisano trójkąt o długościach boków a, b, c. Dowieść, że trójkąt ten jest
(a) ostrokątny wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 + c^2 > 8$,
(b) prostokątny wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 + c^2 = 8$,
(c) rozwartokątny wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 + c^2 < 8$.

Zadanie 10. Udowodnić, że punkt przecięcia wysokości trójkąta ostrokątnego jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt, którego wierzchołkami są spodki wysokości danego trójkąta.

Zadanie 11. Wewnątrz trójkąta równobocznego o boku długości a obrano punkt, którego odległości od wierzchołków trójkąta są równe x, y, z. Udowodnić, że

$$a^4 - a^2(x^2 + y^2 + z^2) + x^4 + y^4 + z^4 - x^2y^2 - x^2z^2 - y^2z^2 = 0.$$

Zadanie 12. Niech a i b będą liczbami naturalnymi. Prostokąt o bokach długości a i b podzielono prostymi równoległymi do boków na kwadraty jednostkowe. Przez wnętrza ilu kwadratów jednostkowych przechodzi przekątna tego prostokąta?