Seria na listopad 2007

Zadanie 1. Rozwiązać równanie

$$[\sqrt[3]{1}]+[\sqrt[3]{2}]+\cdots+[\sqrt[3]{x^3-1}]=400,$$

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x.

Zadanie 2. Wykazać, że równanie

$$[x]+[2x]+[4x]+[16x]+[32x]=12345$$

nie ma rozwiązań. ($[x]$ oznacza część całkowitą liczby x)

Zadanie 3. Dla dowolnej liczby $n\in\mathbb{N}$ wyznaczyć liczbę rozwiązań równania

$$x^2-[x^2]=\{x\}^2$$

w przedziale $[1,n]$. ($[x]$ jest częścią całkowitą liczby x, zaś $\{x\}$ jej częścią ułamkową, czyli $x=[x]+\{x\}$)

Zadanie 4. Dla danych liczb $a_1<a_2<\cdots<a_n$ wyznaczyć najmniejszą wartość m funkcji:

$$f(x)=\mid x-a_1\mid+\mid x-a_2\mid+\cdots+\mid x-a_n\mid.$$

Wyznaczyć wszystkie liczby x dla których $f(x)=m$.

Zadanie 5. Ciąg liczb naturalnych $a_1<a_2<a_3<\ldots$ spełnia warunki: $a_1=1$, $a_{n+1}\leqslant 2n$, dla $n\in\mathbb{N}$. Wykazać, że dla dowolnej liczby $n\in\mathbb{N}$ istnieją wyrazy a_p i a_q tego ciągu spełniające równość: $a_p-a_q=n$.

Zadanie 6. Wykazać, że dla dowolnych liczb $a_1,a_2,\ldots,a_n\in[0,2]$ $(n\geqslant 2)$ zachodzi nierówność:

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\mid a_i-a_j\mid\leqslant\frac{n^2}{2}.$$

Kiedy zachodzi równość?

Zadanie 7. Wykazać, że przy dowolnym rozbiciu zbioru $X=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ na dwa podzbiory przynajmniej jeden z tych podzbiorów zawiera trzy liczby a,b,c, takie, że $c=a+b$.

Zadanie 8. Dane są liczby naturalne $a_1<a_2<...<a_{20}\leqslant 70$. Wykazać, że wśród różnic a_j-a_k $(j>k)$ są przynajmniej cztery równe sobie liczby.

Zadanie 9. Zbiór liczb $\{1,2,3,\ldots,100\}$ rozbito na 7 podzbiorów. Wykazać, że w przynajmniej jednym z tych podzbiorów znajdą się albo cztery liczby a,b,c,d takie, że $a+b=c+d$, albo trzy liczby e,f,g takie, że $e+f=2g$.

Zadanie 10. Rozwiązać następujące równania:

(a) $x^2+y^2=3z^2$ w liczbach całkowitych,
(b) $x^3+3y^3+9z^3-9xyz=0$ w liczbach wymiernych,
(c) $x^2+y^2+z^2=x^2y^2$ w liczbach całkowitych,
(d) $x^2+xy+y^2=x^2y^2$ w liczbach całkowitych,
(e) $(x+2)^4-x^4=y^3$ w liczbach całkowitych,
(f) $x_1^4+x_2^4+\cdots+x_{14}^4=1599$ w liczbach całkowitych.