Seria na luty 2003 (grupa "MŁODSZYCH")

Zadanie 1. Wyznaczyć wszystkie pary liczb trzycyfrowych (a, b) takie, że suma $a+b$ jest wielokrotnością liczby 498, zaś iloraz $\frac{a}{b}$ jest wielokrotnością liczby 5.

Zadanie 2. Wykazać, że liczba $111\ldots11222\ldots22$ (zapisana przy pomocy 100 jedynek i 100 dwójek) jest iloczynem dwóch kolejnych liczb naturalnych.

Zadanie 3. Liczbę M utworzono z liczb 2^{2003} i 5^{2003} zapisując je (w systemie dziesiętnym) jedna za drugą. Ile cyfr ma liczba M?

Zadanie 4. Znaleźć n różnych liczb naturalnych takich, że iloczyn dowolnych $n-1$ spośród tych liczb jest podzielny przez pozostałą.

Zadanie 5. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n dla których liczba $\frac{19n+7}{7n+11}$ jest całkowita.

Zadanie 6. Niech $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $\ldots$ będzie ciągiem kolejnych liczb pierwszych oraz niech $N = p_1p_2\ldots p_n$, gdzie $n > 1$. Wykazać, że liczby $N-1$ oraz $N+1$ nie są kwadratami liczb naturalnych.

Zadanie 7. Każda z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest równa $+1$ lub -1 oraz

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0.$$

Wykazać, że liczba n jest podzielna przez 4.

Zadanie 8. Dla jakich n istnieje wypukły n-kąt, którego jeden z boków ma długość 1 zaś długości wszystkich przekątnych są liczbami naturalnymi?

Zadanie 9. Danych jest pięć odcinków takich, że z każdych trzech można zbudować trójąt. Wykazać, że z pewnych trzech można zbudować trójkąt ostrokątny.

Zadanie 10. Odcinki AB oraz CD są podstawami trapezu $ABCD$, zaś O jest punktem przecięcia przekątnych. Niech S_1, S_2 będą polami trójkątów AOB oraz COD odpowiednio. Wyznaczyć pole trapezu $ABCD$.

Zadanie 11. Długości boków trójkąta ABC są kolejnymi liczbami naturalnymi nie mniejszymi od 3, przy czym $AB < BC < CA$. Wykazać, że wysokość trójkąta opuszczona na bok BC dzieli ten bok na dwa odcinki różniące się długością o 4.

Zadanie 12. Na płaszczyźnie umieszczono n-punktów $P_1, P_2, \ldots, P_n$ w ten sposób, że każdy trójkąt $P_iP_jP_k$ ma pole nie większe niż 1. Wykazać, że wszystkie punkty P_i mieszczą się w pewnym trójkącie o polu 4.

Zadanie 13. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie i takie, że $a_1a_2\cdots a_n = 1$. Udowodnić, że

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geq 2^n.$$

Zadanie 14. Wykazać, że jeśli $a+b+c = 0$, to $a^3+b^3+c^3 = 3abc$.

Zadanie 15. Wykazać, że jeśli $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} = 1$ oraz $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z} = 0$, to

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Zadanie 16. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$a^2+b^2+1 \geq ab+a+b.$$

Zadanie 17. Wykazać, że jeśli $x+y+z = 1$, to $x^2+y^2+z^2 \geq 1/3$.

Zadanie 18. Liczby dodatnie a, b, c są takie, że dla dowolnej liczby naturalnej k istnieje trójkąt o bokach długości a^k, b^k, c^k. Wykazać, że pewne dwie spośród liczb a, b, c są równe.

Zadanie 19. Kwadrat o przekątnej d pocięto na n prostokątów o przekątnych $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Wykazać, że $d_1^2+d_2^2+\cdots+d_n^2 \geq d^2$.

Zadanie 20. Wyznacz $x^{16}+\frac{1}{x^{16}}$, jeżeli $x = \sqrt{2}+1$.