Seria na luty 2003 (grupa "STARSZYCH")

Zadanie 1. Liczby x, y, z spełniają równości:

$$x + y + z = a, \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}.$$

Wykazać, że przynajmniej jedna z nich jest równa a.

Zadanie 2. Niech dla dowolnej liczby pierwszej p oraz liczby naturalnej $s \geq 1$ A będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych k niepodzielnych przez p oraz takich, że $1 \leq k \leq p^s - 1$. Wykazać, że licznik m ułamka

$$\frac{m}{n} = \sum_{k \in A} \frac{1}{k}$$

jest podzielny przez p.

Zadanie 3. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n, liczba $19 \cdot 8^n + 17$ jest złożona.

Zadanie 4. Wykazać, że dla dowolnej liczby pierwszej p istnieje nieskończenie wiele liczb postaci $2^n - n$ podzielnych przez p.

Zadanie 5. Wykazać, że równanie

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2003}$$

ma skończoną liczbę rozwiązań w liczbach naturalnych.

Zadanie 6. Wykazać, że wszystkie punkty danego okręgu można pokolorować dwoma kolorami w ten sposób, że każdy trójkąt prostokątny wpisany w ten okrąg ma dwa wierzchołki różnych kolorów.

Zadanie 7. Niech a, b, c będą liczbami całkowitymi takimi, że jeden z pierwiastków wielomianu $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ jest równy iloczynowi dwóch pozostałych. Wykazać, że liczba $f(1) + f(-1) - 2f(0) - 2$ dzieli liczbę $2f(-1)$.

Zadanie 8. Wielomian $f(x)$ stopnia n jest taki, że $f(k) = \frac{k}{k+1}$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Wyznaczyć $f(n+1)$.

Zadanie 9. Wykazać, że w dowolnym wypukłym czworokącie stosunek największej odległości między wierzchołkami do najmniejszej jest nie mniejszy od $\sqrt{2}$.

Zadanie 10. Wykazać, że dla dowolnych sześciu punktów płaszczyzny stosunek największej odległości między tymi punktami do najmniejszej jest nie mniejszy od $\sqrt{3}$.

Zadanie 11. Wykazać, że jeśli α, β, γ są kątami trójkąta, to

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}$$

oraz

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geq \frac{3}{4}.$$

Zadanie 12. Wykazać, że dla dowolnego czworościanu można zbudować trójkąt którego bokami są krawędzie wychodzące z pewnego wierzchołka tego czworościanu.

Zadanie 13. Wykazać, że jeśli krawędzie czworościanu $ABCD$ spełniają równości

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2,$$

to przynajmniej jedna ze ścian czworościanu jest trójkątem ostrokątnym.

Zadanie 14. Czworościany $A_1A_2A_3A_4$ oraz $A'_1A'_2A'_3A'_4$ są takie, że dla dowolnych i, j, k ściany $A_iA_jA_k$ oraz $A'_iA'_jA'_k$ mają równe pola. Czy te czworościany mają równe objętości?

Zadanie 15. W kole o promieniu 1 wybrano 7 punktów tak, że każde dwa są odległe od siebie o nie mniej niż 1. Wykazać, że jeden z wybranych punktów jest środkiem koła.