Seria na luty 2005

Zadanie 1. Wykazać, że z trzech odcinków o długościach równych odpowiednio a, b, c można zbudować trójkąt wtedy i tylko wtedy, gdy nierówność

$$pa^2 + qb^2 > pqc^2$$

jest spełnona dla wszystkich liczb $p, q \in \mathbb{R}$ i takich, że $p + q = 1$.

Zadanie 2. Określamy ciąg wielomianów $\{P_n(x)\}$ wzorami:

$$P_0(x) = x \text{ oraz } P_n(x) = (P_{n-1}(x) - 2)^2 .$$

dla $n \geqslant 1$. Wyznaczyć współczynnik przy x^2 wielomianu $P_n(x)$.

Zadanie 3. Niech wielomian $P(x)$ stopnia n o współczynnikach rzeczywistych przyjmuje wartości całkowite dla $x = 0, 1, 4, 9, \ldots, n^2$. Wykazać, że $P(k^2)$ jest liczbą całkowitą dla dla dowolnej liczby całkowitej k.

Zadanie 4. Niech $P(x) = ax^2 + bx + c$ będzie takim trójmianem kwadratowym, że równanie $P(x) = x$ nie ma rozwiązań (rzeczywistych). Wykazać, że równanie $P(P(x)) = x$ też nie ma rozwiązań.

Zadanie 5. Znaleźć dwie ostatnie cyfry liczb: 2^{999}, 3^{999}, $14^{14^{14}}$.

Zadanie 6. a) Wykazać, że liczby 9^{9^9} i $9^{9^{9^9}}$ mają takie same dwie ostatnie cyfry (w zapisie dziesiętnym).

b) Wykazać, że liczby $7^{7^{7^7}}$ i $7^{7^{7^{7^7}}}$ mają takie same grupy ostatnich sześciu cyfr (w zapisie dziesiętnym).

Zadanie 7. a) Wyznaczyć dwie ostatnie cyfry liczby $7^{7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{7}}}}}}$ zapisanej przy pomocy 1001 siódemek.

b) Wyznaczyć sześć ostatnich cyfr liczby $9^{9^{9^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{9}}}}}}$ zapisanej przy pomocy 1001 dziewiątek.

Zadanie 8. Liczby dodatnie a, A, b, B, c, C spełniają równości:

$$a + A = b + B = c + C = k.$$

Wykazać, że $aB + bC + cA \leqslant k^2$.

Zadanie 9. Wykazać, że jeśli w wypukłym pięciokącie $ABCDE$ zachodzą równości:

$$\angle ABC = \angle ADE \text{ i } \angle AEC = \angle ADB,$$

to $\angle BAC = \angle DAE$.

Zadanie 10. W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku AB, zaś punkty E i F leżą na bokach AC i BC odpowiednio. Wykazać, że pole trójkąta DEF nie jest większe od sumy pól trójkatów ADE i BDF.

Zadanie 11. a) Wyznaczyć najmniejszą wartość wielomianu

$$P(x, y) = 4 + x^2y^4 + x^4y^2 - 3x^2y^2.$$

b) Wykazać, że wielomian $P(x, y)$ nie może być przedstawiony w postaci sumy kwadratów pewnych wielomianów od zmiennych x i y.

Zadanie 12. W turnieju piłkarskim uczestniczy 18 drużyn. Rozegrano 8 rund - tzn. każda drużyna rozegrała mecze z ośmioma innymi drużynami. Wykazać, że pewne trzy drużyny nie rozegrały między sobą żadnego meczu.

Zadanie 13. Wyznaczyć wszystkie ciągi liczb naturalnych $\{a_n\}$ spełniające następujące waunki:
a) $a_n \leqslant n\sqrt{n}$ dla dowolnej liczby $n \geqslant 1$,
b) dla dowonych różnych liczb m i n różnica $a_m - a_n$ jest podzielna przez $m - n$.