Seria na luty i marzec 2006

Zadanie 1. Wykazać, że wielomian $f(x) = x^5 - x + a$, gdzie a jest liczbą całkowitą niepodzielną przez 5, nie jest iloczynem dwóch wielomianów (dodatniego stopnia) o współczynnikach całkowitych.

Zadanie 2. Niech x, y, z będą trzema różnymi liczbami ze wybranymi ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$. Niech S oznacza sumę wszystkich (sześciu !) trzycyfrowych liczb, których cyframi są x, y i z. Wyznaczyć x, y i z, jeśli wiadomo, że S jest trzykrotnie większa od trzycyfrowej liczby xxx.

Zadanie 3. W trójkąt ostrokątny wpisano kwadrat w ten sposób, że dwa jego wierzchołki leżą na boku trójkąta, a dwa pozostałe na dwóch innych bokach trójkąta. Wykazać, że środek okręgu wpisanego w trójkąt leży wewnątrz kwadratu.

Zadanie 4. Wyznaczyć liczby rzeczywiste a, b, c dla których

$$|ax^2 + bx + c| \leqslant 1 \text{ dla } |x| \leqslant 1$$

oraz $\frac{8}{3}a^2 + 2b^2$ przyjmuje wartość maksymalną.

Zadanie 5. Niech $0 < x_1 < 1$ oraz $x_{k+1} = x_k - x_k^2$ dla $k = 1, 2, 3, \ldots$. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < 1.$$

Zadanie 6. Na płaszczyźnie dane są cztery punkty A_1, B_1, C_1 i D_1. Zbudować czworokąt $ABCD$ taki, że punkt A_1 jest symetryczny do punktu A względem B, punkt B_1 jest symetryczny do punktu B względem C, punkt C_1 jest symetryczny do C względem D oraz punkt D_1 jest symetryczny do D względem A.

Zadanie 7. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = 0 \\ 2x_1 + 5x + 6x_3 + \cdots + 2nx_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ kx_1 + 2kx_2 + 3kx_3 + \cdots + (1 + k^2)x_k + \cdots + nkx_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ nx_1 + 2nx_2 + 3nx_3 + \cdots + (1 + n^2)x_n = 0 \end{cases}$$

Zadanie 8. Dane są różne liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n > 2)$. Z ciągu $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ budujemy ciąg średnich

$$S(A) = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_2 + a_3}{2}, \ldots, \frac{a_{n-1} + a_n}{2}, \frac{a_n + a_1}{2} \right).$$

Następnie budujemy ciągi $S(S(A))$, $S(S(S(A)))$,... . Wykazać, że w pewnym z otrzymanych ciągów nie wszystkie wyrazy są liczbami całkowitymi.

Zadanie 9. Wykazać, że dziewięciocyfrowa liczba, w zapisie (dziesiętnym) której występują wszystkie cyfry oprócz zera i której ostatnią cyfrą (*cyfrą jednostek*) jest 5 nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 10. Sześcian rozbito na n czworościanów. Jaka jest najmniejsza wartość liczby n?