Seria na maj 2003

Zadanie 1. Liczby a, b, c, d są całkowite. Udowodnić, że równanie

$$x^2 + ax + b = y^2 + cy + d$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań (x, y) w liczbach całkowitych wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 - 4b = c^2 - 4d$.

Zadanie 2. Udowodnić, że jeżeli $0 < x \le \frac{1}{2}$ i $0 < y \le \frac{1}{2}$, to

$$\frac{(x+y)^2}{xy} \ge \frac{(2-x-y)^2}{(1-x)(1-y)}.$$

Zadanie 3. Udowodnić, że jeżeli a, b, c są liczbami nieujemnymi, to

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \ge a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b).$$

Zadanie 4. Ciąg $\{p_n\}$ określony jest następująco: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, p_n jest największą liczbą pierwszą dzielącą $p_1 p_2 \dots p_{n-1} + 1$. Udowodnić, że w ciągu $\{p_n\}$ nie wystąpi liczba 5.

Zadanie 5. Udowodnić, że z każdego nieskończonego ciągu liczb naturalnych można wybrać podciąg nieskończony, którego każde dwa wyrazy są względnie pierwsze, lub podciąg nieskończony, którego każde dwa wyrazy mają wspólny dzielnik większy od 1.

Zadanie 6. Ciąg $\{x_n\}$ określony jest wzorami

$$x_0 = 3, \qquad x_n = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Wykazać, że $x_n > 2003$ dla $n > 2006000$.

Zadanie 7. Niech X będzie zbiorem n-elementowym. Udowodnić, że suma liczb elementów zbiorów $A \cap B$ rozciągnięta na wszystkie pary uporządkowane (A, B) podzbiorów zbioru X jest równa $n \cdot 4^{n-1}$.

Zadanie 8. Niech k będzie liczbą naturalną oraz $A_1, A_2, \dots, A_n$ zbiorami k-elementowymi takimi, że każde dwa z tych zbiorów mają dokładnie jeden element wspólny. Wykazać, że jeśli $n \ge k^2 - k + 2$, to istnieje element należący do wszystkich danych zbiorów.

Zadanie 9. Niech X będzie punktem wewnętrznym trójkąta ABC. Udowodnić, że iloczyn odległości tego punktu od wierzchołków A, B, C jest przynajmniej osiem razy większy od iloczynu odległości tego punktu od prostych AB, BC, AC.

Zadanie 10. Udowodnić, że punkt przecięcia wysokości trójkąta ostrokątnego, jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt, którego wierzchołkami są spodki wysokości danego trójkąta.

Zadanie 11. Pole powierzchni czworokąta wypukłego jest równe $32\,cm^2$, zaś suma długości dwóch przeciwległych boków i jednej przekątnej jest równa $16\,cm$. Wyznaczyć wszystkie wartości jakie może przyjmować długość drugiej przekątnej.

Zadanie 12. Niech a, b, c, d będą długościami boków pewnego czworokąta. Udowodnić, że istnieje trapez, którego boki mają długości a, b, c, d.

Zadanie 13. Rozstrzygnąć, czy kwadrat K o boku równym 7 można pokryć ośmioma kwadratami o bokach równych 3

a) przy założeniu, że boki tych ośmiu kwadratów są równoległe do boków K,

b) bez tego założenia.

Zadanie 14. Dowieść, że na płaszczyźnie dowolna łamana zamknięta zawiera się w pewnym kole o promieniu długości $\frac{1}{4}$.

Zadanie 15. Dany jest taki ostrosłup o podstawie czworokątnej, że każda para okręgów wpisanych w sąsiednie ściany ma punkt wspólny. Dowieść, że punkty styczności tych okręgów z podstawą ostrosłupa leżą na jednym okręgu.