Seria na maj 2004

Zadanie 1. Wykazać, że wśród dowolnych kolejnych 39 liczb naturalnych można znaleźć liczbę której suma cyfr jest podzielna przez 11.

Zadanie 2. Na płaszczyźnie narysowano pięć okręgów tak, że dowolne cztery mają punkt wspólny. Wykazać, że pewien punkt płaszczyzny należy do wszystkich okręgów.

Zadanie 3. Dla każdej z liczb ciagu $1, 2, 3, \ldots, 10^9$ obliczamy sumę jej cyfr w zapisie dziesiętnym. To samo robimy z otrzymanymi sumami cyfr. Czynność tę kontynuujemy do momentu otrzymania miliarda liczb jednocyfrowych. Czy w otrzymanym ciągu 1 występuje więcej razy niż 2?

Zadanie 4. Wykazać, że w dowolnym wielościanie suma długości jego krawędzi jest większa niż $3d$, gdzie d jest odległością między najdalej odległymi wierzchołkami tego wielościanu.

Zadanie 5. Reflektor oświetla na płaszczyźnie kąt o mierze $90°$. Wykazać, że dla dowolnych czterech punktów płaszczyzny można w nich ustawić cztery reflektory tak aby oświetlały one całą płaszczyznę.

Zadanie 6. Wykazać, że równanie $x^2 + x + 1 = py$ ma rozwiązanie w liczbach całkowitych (x, y) dla nieskończenie wielu liczb pierwszych p.

Zadanie 7. Danych jest pięć odcinków takich, że z każdych trzech można zbudować trójkąt. Wykazać, że przynajmniej jeden z tych trójkątów jest ostrokątny.

Zadanie 8. Jaki najmniejszy obwód może mieć wypukły 32-kąt, wszystkie wierzchołki którego leżą w węzłach kwadratowej siatki o boku kwadratu długości 1?

Zadanie 9. Wyznaczyć najmniejszą wartość ilorazu pól dwóch równoramiennych trójkątów prostokątnych takich, że wierzchołki jedego z nich leżą na trzech różnych bokach drugiego.

Zadanie 10. Malejący ciąg liczb dodatnich $\{x_n\}$ jest taki, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność:

$$x_1 + \frac{x_4}{2} + \frac{x_9}{3} + \cdots + \frac{x_{n^2}}{n} \leqslant 1.$$

Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n:

$$x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \cdots + \frac{x_n}{n} \leqslant 3.$$

Zadanie 11. Na okręgu dane są punkty A, B, M i N. Z punktu M poprowadzono cięciwy MA_1 i MB_1, prostopadłe do prostych NB i NA, odpowiednio. Wykazać, że proste AA_1 i BB_1 są równoległe.

Zadanie 12. Wyznaczyć wszystkie pary liczb naturalnych (x, y) spełniających równanie:

$$x^3 - y^3 = xy + 61.$$

Zadanie 13. a) Iloczyn pewnych n liczb całkowitych jest równy n, zaś ich suma jest równa 0. Wykazać, że liczba n jest podzielna przez 4.
b) Niech liczba naturalna n będzie podzielna przez 4. Wykazać, że istnieje n liczb całkowitych których iloczyn jest równy n, zaś suma wynosi 0.

Zadanie 14. Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1 + a_2} + \cdots + \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} < 4\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right).$$