Seria na maj 2005

Zadanie 1. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b istnieją liczby $x, y \in [0, 1]$ takie, że
$$|ax + by - xy| \geqslant \frac{1}{3}.$$

Zadanie 2. Rozwiązać w liczbach dodatnich układ równań:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - \frac{2005}{x_1 x_2} = x_3 \\ x_2 + x_3 - \frac{2005}{x_2 x_3} = x_4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{2004} + x_{2005} - \frac{2005}{x_{2004} x_{2005}} = x_1 \\ x_{2005} + x_1 - \frac{2005}{x_{2005} x_1} = x_2. \end{cases}$$

Zadanie 3. Wykazać, że
$$\frac{m_a^2}{b^2 + c^2} + \frac{m_b^2}{a^2 + c^2} + \frac{m_c^2}{a^2 + b^2} \leqslant \frac{9}{8},$$
gdzie a, b, c są długościami boków, zaś m_a, m_b, m_c długościami odpowiednich środkowych pewnego trójkata.

Zadanie 4. Wykazać, że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 1$
$$\frac{n^2}{3} + n > (n!)^{\frac{2}{n}}.$$

Zadanie 5. Dla każdej liczby naturalnej n, wyznaczyć wszystkie wielomiany stopnia n o współczynnikach równych -1 lub 1 i mające n pierwiastków rzeczywistych.

Zadanie 6. Czy liczbę 1 można przedstawić w postaci sumy
$$1 = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_{2005}},$$
gdzie $n_1, n_2, \dots, n_{2005}$ są różnymi liczbami naturalnymi?

Zadanie 7. Dany jest trójkąt ABC. Jaki zbiór tworzą punkty M, których symetryczne obrazy względem prostych AB, BC i CA leżą na okręgu opisanym na trójkącie ABC ?

Zadanie 8. Z wierzchołków B i C trójkąta ABC poprowadzono środkowe BB_1 i CC_1. Wykazać, że
$$BB_1^2 + CC_1^2 > \frac{9}{8} BC^2.$$