Seria na marzec 2003 (grupa "MŁODSZYCH")

Zadanie 1. Wykazać, że jeśli $ABCD$ jest kwadratem o boku a, to dla dowolnego punktu P okręgu opisanego na tym kwadracie przynajmniej jedna z odległości AP, BP, CP lub DP jest liczbą niewymierną.

Zadanie 2. Dwusieczne AA_1, BB_1 i CC_1 trójkąta ABC przecinają się w punkcie M. Wykazać, że jeśli okręgi wpisane w trójkąty MB_1A, MC_1A, MC_1B, MA_1B, MA_1C i MB_1C mają równe promienie, to trójkąt ABC jest równoboczny.

Zadanie 3. Na płaszczyźnie narysowano sześć okręgów w ten sposób, że środek każdego z nich leży na zewnątrz wszystkich pozostałych okręgów. Wykazać, że nie istnieje punkt płaszczyzny należący do wszystkich sześciu okręgów.

Zadanie 4. Wykazać, że jeśli pewien zbiór punktów płaszczyzny ma więcej niż jeden środek symetrii, to ma ich nieskończenie wiele.

Zadanie 5. Prosta l dzieli trójkąt ABC na dwie części o równych polach i obwodach. Wykazać, że środek okręgu wpisanego w ten trójkąt leży na prostej l.

Zadanie 6. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC, zaś punkty M i L należą kolejno do boków AC i BC oraz

$$\angle PAC = \angle PBC, \quad \angle PLC = \angle PMC = 90^\circ.$$

Wykazać, że jeśli D jest środkiem boku AB, to $DM = DL$.

Zadanie 7. Dwusieczne kątów wewnętrznego i zewnętrznego przy wierzchołku C trójkąta ABC przcinają prostą AB w punktach L i M odpowiednio. Wykazać, że jeśli $CL = CM$, to $AC^2 + BC^2 = 4R^2$, gdzie R jest długością promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Zadanie 8. Wewnątrz trójkąta ABC wybrano punkt M taki, że $\angle MBA = 30^\circ$, $\angle MAB = 10^\circ$. Obliczyć $\angle AMC$, jeśli $\angle ACB = 80^\circ$ oraz $AC = BC$.

Zadanie 9. Na bokach BC i AC trójkąta ABC wybrano odpowiednio punkty D i E tak, że $\angle BAD = 50^\circ$, $\angle ABE = 30^\circ$. Obliczyć $\angle BED$, jeśli $\angle ABC = \angle ACB = 50^\circ$.

Zadanie 10. Na boku BC trójkąta ABC wybrano punkt P taki, że $PC = 2PB$. Wyznaczyć $\angle ACB$, jeśli $\angle ABC = 45^\circ$, $\angle APC = 60^\circ$.

Zadanie 11. Wykazać, że wśród dowolnych $n+2$ liczb całkowitych istnieją dwie, których suma bądź różnica jest podzielna przez $2n$. $(n \geq 1)$

Zadanie 12. Dla liczby naturalnej $n > 1$ wyznaczyć największą liczbę $k = k(n)$ o tej własności, że w zbiorze n-elementowym można wybrać k różnych podzbiorów, spośród których każde dwa posiadają wspólne elementy.

Zadanie 13. W prostokątnym układzie współrzędnych rozpatrujemy zbiór

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x \leq 12,\ y \leq 12\}.$$

Każdy z punktów zbioru M kolorujemy jednym z trzech kolorów: białym, czerwonym lub niebieskim. Wykazać, że istnieje prostokąt o bokach równoległych do osi układu, którego wierzchołkami są pewne punkty ze zbioru M pokolorowane tym samym kolorem.

Zadanie 14. Wewnątrz kwadratu K o boku 15 narysowano 20 rozłącznych kwadratów $K_1, K_2, \ldots,$ K_{20}, każdy o boku 1. Wykazać, że w kwadracie K można umieścić okrąg o promieniu 1 nie mający punktów wspólnych z żadnym z kwadratów K_i $(i = 1, 2, \ldots 20)$.

Zadanie 15. W kwadracie o polu 6 umieszczono trzy wielokąty o polu 3 każdy. Wykazać, że pole części wspólnej pewnych dwóch wielokątów jest nie mniejsze od 1.

Zadanie 16. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, dla których istnieje liczba naturalna n taka, że $p = n^4 + 4^n$.