Seria na marzec 2004 (grupa "MŁODSZYCH")

Zadanie 1. W czworościanie $ABCD$ krawędzie AB i CD są równej długości. Niech K, L, M, N będą środkami odpowiednio krawędzi AC, BC, BD, AD. Udowodnić, że proste KM i LN przecinają się pod kątem prostym.

Zadanie 2. Liczby naturalne p i q ($p < q$) są kolejnymi liczbami pierwszymi większymi od 2. Wykazać, że liczba $p + q$ jest iloczynem co najmniej trzech (niekoniecznie różnych) liczb naturalnych większych of 1.

Zadanie 3. Funkcja f określona na zbiorze liczb rzeczywistych i przyjmująca wartości nieujemne spełnia dla wszystkich liczb rzeczywisztych x, y warunek

$$f(x + y) \geq f(x) + f(y).$$

Wykazać, że $f(x) = 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

Zadanie 4. W czworościanie $ABCD$ wszystkie kąty płaskie przy wierzchołku D są proste. Udowodnić, że środki okręgów opisanych na ścianach tego czworościanu leżą na jednej płaszczyźnie.

Zadanie 5. Udowodnić, że jeśli obwody ścian czworościanu są równe, to ściany te są trójkątami przystającymi.

Zadanie 6. Wyznaczyć kąty trójkąta, w którym dwie wysokości mają długości nie mniejsze od długości boków na które są opuszczone.

Zadanie 7. Każda z przekątnych wypukłego czworokąta $ABCD$ dzieli go na dwie części o równych polach. Wykazać, że $ABCD$ jest równoległobokiem.

Zadanie 9. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ każda z przekątnych AD, BE i CF dzieli go na dwie części o równych polach. Wykazać, że te przekątne przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 10. Liczby naturale a i b są względnie pierwsze. Jakie wartości może przyjmować największy wspólny dzielnik liczb $a + b$ i $a^2 + b^2$?

Zadanie 11. Szachownica 6×6 została pokryta osiemnastoma kostkami domino (rozmiarów 1×2). Wykazać, że szchownicę można podzielić na dwie części, linią pionową lub poziomą nie przecinającą wnętrza żadnej z kostek domino.

Zadanie 12. Dane są parami różne liczby dodatnie $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Z liczb tych tworzymy wszystkie możliwe sumy z dowolną liczbą (od 1 do n) różnych składników. Wykazać, że wsród tych sum można znaleźć przynajmniej $n(n + 1)/2$ parami różnych liczb.

Zadanie 13. Jakie największe pole może mieć trójkąt o bokach długości a, b, c jeżeli: $0 < a \leq 1 \leq b \leq 2 \leq c \leq 3$?

Zadanie 14. Wyznaczyć wszystkie naturalne liczby nieparzyste n, dla których liczba $(n - 1)!$ nie jest podzielna ptrzez n^2.

Zadanie 15. Niech $ABCD$ będzie czworokątem opisanym na okręgu o środku O. Wykazać, że suma miar kątów AOB i COD jest równa $180°$.