Seria na marzec 2004 (starsi)

Zadanie 1. Liczby x_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ spełniają układ n^3 równości:

$$x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} = 0,$$

dla $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$. Wykazać, że istnieją liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ takie, że $x_{ij} = a_i - a_j$ dla dowolnych i oraz j.

Zadanie 2. Na okręgu umieszczono n liczb rzeczywistych, których suma jest równa 0 i jedną z liczb jest 1.

(a) Wykazać, że pewne dwie sąsiednie liczby różnią się o nie mniej niż $4/n$.

(b) Wykazać, że pewna z liczb różni się od średniej arytmetycznej dwóch sąsiednich liczb o nie mniej niż $8/n^2$.

Zadanie 3. Liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są dodatnie oraz ich suma jest równa 1. Niech M oznacza największą spośród liczb:

$$\frac{x_1}{1+x_1}, \frac{x_2}{1+x_1+x_2}, \ldots, \frac{x_n}{1+x_1+x_2+\cdots+x_n}.$$

Wyznaczyć możliwie najmniejszą wartość M.

Zadanie 4. Dana jest pewna liczba kwadratów o sumie pól 1. Wykazać, że można je zmieścić w kwadracie o boku długości $\sqrt{2}$, tak aby żadne dwa nie miały wspólnych punktów wewnętrznych.

Zadanie 5. Wyznaczyć największą liczbę naturalną m taką, że liczba $4^{27}+4^{1000}+4^m$ jest kwadratem liczby naturalnej.

Zadanie 6. Niech $f(x) = ax^2 + bx + c$ będzie takim trójmianem kwadratowym, że równanie $f(x) = x$ nie ma pierwiastków rzeczywistych. Wykazać, że równanie $f(f(x)) = x$ również nie ma pierwiastków rzeczywistych.

Zadanie 7. Dany jest wypukły wielokąt, wewnątrz którego nie mieści sie żaden trójkat o polu 1. Wykazać, że ten wielokąt mieści się w trójkącie o polu 4.

Zadanie 8. W kwadratowej szachownicy 7×7 należy zaznaczyć środki k pól tak, aby żadne cztery zaznaczone środki nie były wierzchołkami prostokąta o bokach równoległych do krawędzi szachownicy. Dla jakiej największej wartości k jest to możliwe?

Zadanie 9. Na kwadratowej kartce papieru narysowano n prostokątów z bokami równoległymi do odpowiednich krawędzi kartki, przy czym żade dwa z tych prostokątów nie mają wspólnych punktów wewnętrznych. Następnie wyciąto wszystkie prostokąty. Wykazać, że kartka rozpadnie się w ten sposób na nie więcej niż $n + 1$ części.

Zadanie 10. Na płaszczyźnie narysowano n różnych okręgów o promieniu 1. Wykazać, że jeden z okręgów zawiera łuk długości nie mniejszej niż $2\pi/n$ nie mający punktów wspólnych z pozostałymi okręgami.

Zadanie 11. Wykazać, że dowolny wielokąt wypukły mieści się całkowicie w okręgu przechodzącym przez pewne trzy kolejne jego wierzchołki.

Zadanie 12. Dla dowolnych wartości $n \in \mathbb{N}$ i $a \in \mathbb{R}$ rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a, \\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = a^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n = a^n. \end{cases}$$