Seria na marzec 2005

Zadanie 1. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_{16}$ będzie dowolnym ciągiem o wyrazach należących do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Wykazać, że iloczyn pewnych kolejnych wyrazów tego ciągu jest kwadratem liczby naturalnej.

Zadanie 2. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ będą różnymi liczbami wybranymi ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 200\}$. Wykazać, że zbiór $\{a_1, a_2, \ldots, a_{11}\}$ zawiera dwa rozłączne podzbiory o równych sumach liczb wchodzących w skład tych podzbiorów.

Zadanie 3. Niech $a, b, c > 0$ oraz $abc = 1$. Udowodnić, że

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ac}{a^5 + c^5 + ac} \leqslant 1.$$

Zadanie 4. Znaleźć wszystkie nieujemne liczby całkowite x, y spełniające równanie $(xy - 7)^2 = x^2 + y^2$.

Zadanie 5. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną, która jest jednocześnie sumą dziewięciu kolejnych liczb naturalnych, sumą dziesięciu kolejnych liczb naturalnych oraz sumą jedenastu kolejnych liczb naturalnych.

Zadanie 6. Wykazać, że iloczyn długości dwusiecznych kątów trójkąta jest mniejszy od iloczynu długości boków tego trójkąta.

Zadanie 7. Punkty M, N są odpowiednio środkami boków BC i CD równoległoboku $ABCD$. Czy proste AM i AN mogą dzielić kąt BAD na trzy równe części?

Zadanie 8. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ istnieje n-elementowy zbiór liczb S złożony z liczb naturalnych taki, że $(a - b)^2 \mid ab$ dla dowolnych różnych $a, b \in S$.

Zadanie 9. W trójkacie ABC punkt D jest środkiem boku AB, zaś E leży na boku BC i spełnia równość $|BE| = 2 \cdot |EC|$. Wiedząc, że $\angle ADC = \angle BAE$ wyznaczyć $\angle BAC$.

Zadanie 10. Kasa dworca kolejowego sprzedaje bilety do dwustu miejscowości. Pewnego dnia sprzedano 3800 biletów. Wykazać, sprzedano taką samą ilość biletów na podróż do przynajmniej sześciu pewnych miejscowości. Czy można twierdzić, że sprzedano taką samą ilość biletów na podróż do pewnych siedmiu miejscowości?

Zadanie 11. Niech $a_1 = a_2 = 1$. Dla $n \geqslant 1$ niech a_{n+2} będzie resztą z dzielenia liczby $a_n + a_{n+1}$ przez 20. Jaka jest reszta z dzielenia liczby $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2005}^2$ przez 8?

Zadanie 12. Ciąg $\{x_n\}$ jest zdefiniowany następująco: $x_0 = a, x_1 = b$ oraz

$$x_{n+2} = \frac{1 + x_{n+1}}{x_n}$$

dla $n \geqslant 0$. Wyznaczyć x_{2005}.

Zadanie 13. Wykazać, że dla dowolnych dodatnich liczb x_1, x_2, x_3, x_4 takich, że $x_1x_2x_3x_4 = 1$ zachodzą nierówności:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 \geqslant x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

oraz

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 \geqslant \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}.$$

Zadanie 14. Niech a, b, c, d bedą liczbami rzeczywistymi takimi, że $a+b = c+d$ oraz $|a-b| < |c-d|$. Udowodnić, że $cd < ab$.