Seria na październik 2003

Zadanie 1. Niech $x_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}$ (pierwiastek kwadratowy występuje n-razy). Wykazać, że
$$\frac{2 - x_n}{2 - x_{n-1}} > \frac{1}{4}.$$

Zadanie 2. W trójkąt wpisano okrąg. Wykazać, że punkty styczności tego okręgu z bokami trójkąta są wierzchołkami trójkąta ostrokątnego.

Zadanie 3. Liczby $a, b, \sqrt{a} + \sqrt{b}$ są wymierne. Wykazać, że liczby $\sqrt{a}$ i $\sqrt{b}$ są również wymierne.

Zadanie 4. Liczby a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 są dodatnie oraz $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1$. Udowodnić nierówność
$$\left(\frac{1}{a_1} - 1\right)\left(\frac{1}{a_2} - 1\right)\left(\frac{1}{a_3} - 1\right)\left(\frac{1}{a_4} - 1\right)\left(\frac{1}{a_5} - 1\right) \geq 1024.$$

Zadanie 5. Na konferencję przyjechało wielu uczonych z całego świata. Jedni znali się już wcześniej, inni nie. Okazało się, że nie ma osób które miałyby tę samą liczbę znajomych i jednocześnie miałyby wspólnych znajomych. Wykazać, że na konferencję przyjechał uczony mający dokładnie jednego znajomego wśród uczestników.

Zadanie 6. Niech a i m będą danymi liczbami naturalnymi względnie pierwszymi. Wykazać, że istnieją liczby naturalne $x, y \leq \sqrt{m}$ takie, że przynajmniej jedna z liczb $ax + y$ lub $ax - y$ jest podzielna przez m.

Zadanie 7. W sześciokącie foremnym pewne pary wierzchołków połączono odcinkami i każdy z nich pomalowano na niebiesko albo na czerwono. Wykazać, że: a) jeżeli poprowadzono 15 odcinków, to znajdziemy przynajmniej dwa trójkąty o bokach jednego koloru, b) można poprowadzić 14 odcinków tak, aby żaden trójkąt nie był jednokolorowy.

Zadanie 8. Kwadrat podzielono na prostokąty. Wykazać, że suma pól okręgów opisanych na wszystkich prostokątach jest nie mniejsza od pola koła opisanego na danym kwadracie.

Zadanie 9. Wykazać, że suma pól pięciu trójkątów utworzonych z par sąsiednich boków pięciokąta wypukłego i odpowiednich przekątnych jest większa od pola tego pięciokąta.

Zadanie 10. Wielokąt o polu B jest wpisany w koło o polu A i opisany na kole o polu C. Udowodnić, że $2B < A + C$.

Zadanie 11. Niech a, b, c będą długościami boków pewnego trójkąta oraz niech $P = a + b + c$, $T = ab + bc + ac$. Udowodnić, że $3T < P^2 < 4T$.

Zadanie 12. Wykazać, że nie istnieje liczba postaci $xyxy$ w dziesiętnym systemie pozycyjnym, która jest sześcianem liczby naturalnej. Czy jest to prawdą w innych systemach pozycyjnych?

Zadanie 13. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby rzeczywiste x, y, z spełniające układ równań:
$$\begin{cases} xy + yz + zx = 12 \\ x + y + z + 2 = xyz \end{cases}$$

Zadanie 14. Iloma zerami w zapisie dziesiętnym może się kończyć liczba $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ dla $n \in \mathbb{N}$?

Zadanie 15. Na każdej z dziesięciu karteczek napisano kilka potęg liczby 2. Okazało się, że sumy liczb napisanych na wszystkich karteczkach są takie same. Wykazać, że pewna liczba występuje na przynajmniej sześciu karteczkach.