Seria na październik 2003

Zadanie 1. Punkt P leży wewnątrz trójkąta równobocznego i jest odległy od jego wierzchołków o $3, 4$ i 5. Obliczyć pole tego trójkąta.

Zadanie 2. Ciąg $\{x_n\}$ liczb rzeczywistych jest taki, że $x_0 = a$, $x_1 = b$ oraz

$$x_{n+2} = \frac{1 + x_{n+1}}{x_n}$$

dla $n \geq 0$. Obliczyć x_{2003}.

Zadanie 3. Długości boków trójkąta ABC są liczbami naturalnymi oraz $\angle A = 2\angle B$ i $\angle C > 90°$. Wyznaczyć minimalną długość obwodu tego trójkąta.

Zadanie 4. Wykazać, że jeśli a, b, c są liczbami rzeczywistymi takimi, że $a + b + c = abc$, to

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}.$$

Zadanie 5. Niech $f(x) = x^2 + ax + b\cos x$. Wyznaczyć wszystkie wartości a, b dla których równania $f(x) = 0$ i $f(f(x)) = 0$ mają te same (niepuste) zbiory rozwiązań.

Zadanie 6. Niech m będzie liczbą naturalną oraz niech

$$S = \left\{n \in \mathbb{N} : m^2 \leq n < (m+1)^2\right\}.$$

Udowodnić, że iloczyny postaci ab, gdzie $a, b \in S$ są różne. (tzn. jeśli $\{a_1, b_1\} \neq \{a_2, b_2\}$, to $a_1 b_1 \neq a_2 b_2$.)

Zadanie 7. Niech p będzie liczbą pierwszą oraz $a_i \in \{0, 1\}$ dla $i = 0, 1, \ldots, p-1$. Załóżmy, że nie wszystkie liczby a_i sa równe oraz niech $f(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych takim, że $f(i) = a_i$ dla $i = 0, 1, \ldots, p-1$. Udowodnić, że wielomian $f(x)$ ma stopień nie mniejszy niż $p - 1$.

Zadanie 8. Niech $x, y, z > 1$ oraz $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Udowodnić, że

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

Zadanie 9. W pewnym kraju jest $2n$ portów lotniczych. Między pewnymi portami są połączenia bezpośrednie, lecz wśród dowolnych trzech portów pewne dwa nie mają bezpośredniego połączenia. Jaka jest maksymalna liczba bezpośrednich połączeń lotniczych w tym kraju?

Zadanie 10. Wyznaczyć, wszystkie pary liczb naturalnych (x, n) takie, że $x^n + 2^n + 1$ jest dzielnikiem liczby $x^{n+1} + 2^{n+1} + 1$.

Zadanie 11. Liczbę 10-cyfrową nazwiemy ciekawą, jeśli jej cyfry są parami różne oraz jest ona podzielna przez 11111. Wyznaczyć ilość ciekawych liczb.

Zadanie 12. W pola kwadratowej tablicy $n \times n$ ($n > 100$) wpisano liczby 0 lub 1, przy czym wpisano dokładnie $n - 1$ jedynek. Operację nazwiemy dopuszczalną, jeśli polega ona na jednoczesnym odjęciu 1 od wybranej liczby i dodaniu 1 do wszystkich pozostałych liczb stojących w tym samym wierszu i tej samej kolumnie co wybrana liczba. Czy po pewnej liczbie operacji dopuszczalnych można uzyskać tablicę z jednakowymi liczbami?

Zadanie 13. Na tablicy napisano dwie liczby 19 i 98. Następnie co minutę każda z napisanych liczb x jest zastępowana albo przez $x + 1$, albo przez x^2. Czy w pewnej chwili mogą na tablicy pojawić się jednakowe liczby?