Seria na październik 2004 (M)

Zadanie 1. Wykazać, że jeśli $k \neq n$, to liczby $2^{2^k}+1$ i $2^{2^n}+1$ są względnie pierwsze.

Zadanie 2. Na jednym z nienarożnych pól brzegowych szachownicy 4×4 zapisano znak $-$ wypełniając pozostałe pola znakami $+$. Jeden ruch polega na zamianie na przeciwne wszystkich znaków w rzędzie pionowym, poziomym lub ukośnym (równoległym do którejś przekątnej) Wykazać, że po dowolnej liczbie ruchów na szachownicy znajdzie się co najmniej jeden znak $-$.

Zadanie 3. Na jednym z pól szachownicy 8×8 wpisano 0, na pozostałych $-$ jedynki. W jednym ruchu możemy wybrać wiersz i kolumnę i zmienić w tym wierszu lub kolumnie zera na jedynki i odwrotnie. Pokazać, że nie możemy w ten sposób otrzymać samych jedynek.

Zadanie 4. Dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ znaleźć rozkład liczby 1 na sumę n odwrotności różnych liczb naturalnych.

Zadanie 5. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w koło. Udowodnić, że środki kół wpisanych w trójkąty ABC, BCD, CDA, DAB są wierzchołkami prostokąta.

Zadanie 6. Znaleźć wszystkie wartości całkowite parametru a, dla których równanie

$$(x-a)(x+10)+1=0$$

ma pierwiastki całkowite.

Zadanie 7. Wykazać, że kwadrat każdej liczby pierwszej większej od 3 daje przy dzieleniu przez 24 resztę 1.

Zadanie 8. Szachista gra na treningu co najmniej jedną partię dziennie, nie więcej jednak niż 12 partii na tydzień. Wykazać, że można znaleźć kilka (kilkanaście) kolejnych dni, w których łącznie zagrał 20 partii.

Zadanie 9. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje wielościan mający dokładnie n przekątnych. (Przekątnymi nazywamy odcinki łączące wierzchołki i nie będące krawędziami, ani przekątnymi ścian).

Zadanie 10. Mamy siedem odcinków o długościach zawartych w przedziale $[1, 10]$. Udowodnij, że wśród nich są takie trzy, które moga być bokami pewnego trójkąta. Czy liczbę siedem można zastąpić mniejszą?

Zadanie 11. Niech $n > 2$. Wykazać, że jeśli jedna z liczb 2^n-1 i 2^n+1 jest pierwsza to druga jest złożona.

Zadanie 12. Wykazać, że jeśli p i $8p-1$ są liczbami pierwszymi, to $8p+1$ jest liczbą złożoną.

Zadanie 13. Trójmian kwadratowy $f(x) = ax^2+bx+c$ ma wszystkie współczynniki dodatnie. Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y zachodzi nierówność

$$f(x)\dot{f}(y) \geqslant (f(\sqrt{xy}))^2.$$

Zadanie 14. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC, przy czym $\sphericalangle PAC = \sphericalangle PBC$. Punkty L i M są odpowiednio rzutami P na proste BC i CA, D jest środkiem odcinka AB. Dowieść, że $DL = DM$.

Zadanie 15. Udowodnij, że jeśli liczby x, y należą do przedziału $[0, 1]$, to

$$\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+x} \leqslant 1.$$