Seria na październik 2004 (S)

Zadanie 1. Dla jakich n wspólczynniki Newtona $\binom{n}{k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$ są wszystkie nieparzyste?

Zadanie 2. Niech P_n oznacza liczbę wszystkich funkcji różnowartościowych $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ dla których $f(i) \neq i$, gdzie $i = 1, 2, \ldots, n$. Wykazać, że jeśli $n > 1$ to P_n dzieli się przez $n - 1$.

Zadanie 3. Wykazać, że jeśli $n > 1$, to

$$\binom{n}{1} \cdot 1 - \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{2} + \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n} \cdot \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Zadanie 4. Wykazać, że jeśli obwody ścian czworościanu są równe, to ściany są trójkątami przystającymi.

Zadanie 5. Wykazać, że wielomian $x^4y^4 + x + y + 1$ nie jest iloczynem wielomianów $p(x)$ i $q(y)$.

Zadanie 6. Wykazać, że trójkąt, w którym najdłuższy bok ma długość 1 można pokryć dwoma kołami o średnicy 1.

Zadanie 7. Wykazać, że każdą liczbę całkowitą można przedstawić jako sumę pięciu sześcianów liczb całkowitych.

Zadanie 8. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje liczba naturalna m taka, że

$$(\sqrt{2} - 1)^n = \sqrt{m+1} - \sqrt{m}.$$

Zadanie 9. Wewnątrz kwadratu o boku długości 1 leży pewna liczba odcinków o końcach na obwodzie kwadratu. Suma długości odcinków wynosi 3. Wykazać, że jeśli $r < 1/8$, to w kwadracie tym można zmieścić koło o promieniu r nie przecinające żadnego z danych odcinków.

Zadanie 10. Znaleźć wszystkie liczby całkowite, których kwadraty mają w zapisie dziesiętnym równe dwie ostatnie cyfry.

Zadanie 11. Oznaczmy, przez $S(n)$ sumę cyfr zapisu dziesiętnego liczby n. Wykazać, że

$$S(8n) \geqslant \frac{1}{8}S(n).$$

Zadanie 12. Punkty P i Q leżą na obwodzie wielokąta opisanego na okręgu o środku O. Prosta PQ dzieli zarówno pole, jak i obwód wielokąta na równe części. Wykazać, że punkt O leży na tej prostej.

Zadanie 13. Wykazać, ze każdą liczbę całkowitą nieujemną n można przedstawić w postaci

$$n = \frac{(x+y)^2 + 3x + y}{2},$$

gdzie x, y są całkowite i nieujemne oraz liczby x, y są określone jednoznacznie przez liczbę n.

Zadanie 14. Wyznaczyć liczbę takich podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, które nie zawierają dwóch kolejnych liczb.

Zadanie 15. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC, przy czym $\sphericalangle PAC = \sphericalangle PBC$. Punkty L i M są odpowiednio rzutami P na proste BC i CA, D jest środkiem odcinka AB. Dowieść, że $DL = DM$.