Seria na październik 2007

Zadanie 1. Wyznaczyć wszystkie pary (x, y) liczb dodatnich dla których funkcja
$$f(x,y) = \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$
przyjmuje wartość najmniejszą. Wyznaczyć tę najmniejszą wartość.

Zadanie 2. Liczby x, y, z, u są nieujemne oraz spełniają równość:
$$2x + xy + z + yzu = 1.$$
Jaką największą wartość może przyjąć iloczyn $x^2y^2z^2u$?

Zadanie 3. Liczby x, y, z, t są nie mniejsze od $1/4$ oraz $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość iloczynu $xyzt$.

Zadanie 4. Liczby a, b, c, d spełniają nierówności $a < b < c < d$. Ustawić liczby
$$x = (a+b)(c+d), \quad y = (a+c)(b+d), \quad z = (a+d)(b+c)$$
w porządku rosnącym.

Zadanie 5. Liczby a, b, c są takie, że
$$abc = 1 \quad \text{oraz } a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$
Wykazać, że dokładnie jedna z nich jest większa od 1.

Zadanie 6. Wykazać, że jeśli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówności:
$$a + b + c > 0, \quad ab + bc + ca > 0, \quad abc > 0,$$
to te liczby są dodatnie.

Zadanie 7. Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność:
$$a^2(b + c - a) + b^2(a + c - b) + c^2(a + b - c) \leqslant 3abc.$$

Zadanie 8. Wykazać, że dla dowolnych liczb a, b, c większych od 1, zachodzi nierówność
$$2\left(\frac{\log_b a}{a+b} + \frac{\log_c b}{b+c} + \frac{\log_a c}{c+a}\right) \geqslant \frac{9}{a+b+c}.$$

Zadanie 9. Liczby dodatnie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 2)$ są takie, że $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Wykazać, że
$$\frac{a_1}{2-a_1} + \frac{a_2}{2-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{2-a_n} \geqslant \frac{n}{2n-1}.$$

Zadanie 10. Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 2)$ zachodzi nierówność:
$$\frac{a_1}{S-a_1} + \frac{a_2}{S-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{S-a_n} \geqslant \frac{n}{n-1},$$
gdzie $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.