Zadania z września i października 2002

Zadanie 1. W prostokącie o wymiarach 3×4 wybrano 6 punktów. Wykazać, że pewne dwa spośród nich są odległe od siebie o nie więcej niż $\sqrt{5}$.

Zadanie 2. Spośród liczb $\{1, 2, 3, \dots, 106\}$ wybieramy dziesięć różnych liczb $a_1, a_2, \dots, a_{10}$. Wykazać, że zbiór $\{a_1, a_2, \dots, a_{10}\}$ zawiera dwa rozłączne (niepuste) podzbiory których elementy dają taką samą sumę.

Zadanie 3. W kwadracie o boku 1 wybrano 51 punktów. Wykazać, że pewne trzy punkty leżą wewnątrz okręgu o promieniu $\frac{1}{7}$.

Zadanie 4. Wykazać, że istnieje liczba naturalna której ostatnimi cyframi zapisu dziesiętnego są kolejno 2002 i która jest podzielna przez 2001.

Zadanie 5. Czy można znaleźć potęgę trójki, której ostatnimi cyframi są 000001?

Zadanie 6. Sosnowy las rośnie na obszarze w kształcie kwadratu o boku 1 km. Wiedząc, że w lesie rośnie 4500 drzew o średnicy nie większej niż $0,5$ m wykazać, że w pewnym prostokącie o wymiarach 10 m $\times$ 20 m nie rośnie ani jedno drzewo.

Zadanie 7. Wykazać, że wśród dowolnych $n+1$ liczb spośród liczb zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$

a) istnieje para liczb o sumie $2n+1$,
b) istnieje para liczb względnie pierwszych.
c) istnieje liczba będąca wielokrotnością innej.

Zadanie 8. Wykazać, że jeśli m, n są względnie pierwszymi dodatnimi liczbami całkowitymi, to istnieje liczba całkowita $k \geq 1$ taka, że n dzieli liczbę $m^k - 1$.

Zadanie 9. Wykazać, że wśród dowolnych $n+1$ liczb całkowitych istnieje para liczb różniących się o całkowitą wielokrotność liczby n.

Zadanie 10. Niech $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n^2+1}$ będzie ciągiem różnych liczb rzeczywistych. Wykazać, że ciąg ten zawiera $n+1$ wyrazowy podciąg monotoniczny.

Zadanie 11. Wewnątrz okręgu o promieniu 1 narysowano dwa trójąty przy czym każdy z nich ma pole większe od 1. Wykazać, że trójkąty te przecinają się.

Zadanie 12. Wypukły n-kąt W zawarty jest w kwadracie o boku 1. Wykazać, że pewne trzy wierzchołki wielokąta W są wierzchołkami trójkąta T o polu nie większym niż

a) $\frac{8}{n^2}$,
b)* $\frac{16\pi}{n^3}$.

Zadanie 13. Wykazać, że dowolny wypukły wielokąt o polu 1 zawiera trójkąt o polu

a) nie mniejszym niż $\frac{1}{4}$,
b)* nie mniejszym niż $\frac{3}{8}$.

Zadanie 14. Wewnątrz kwadratu $ABCD$ o boku 1 wybrano n punktów $P_1, P_2, \dots, P_n$. Wykazać, że pewne trzy punkty spośród $A, B, C, D, P_1, P_2, \dots, P_n$ wyznaczają trójkąt o polu nie większym niż $\frac{1}{2n+2}$.

Zadanie 15. Wewnątrz kwadratu o boku 1 wybrano $n \geq 3$ punktów, przy czym żadne trzy nie są współliniowe. Wykazać, że pewne trzy spośród nich wyznaczają trójkąt o polu nie większym niż $\frac{1}{n-2}$.

Zadanie 16. Wyznaczyć następujące sumy:

a) $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1}$,

b) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}$,

c) $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \cdots + n\cdot n!$,

d) $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2001}+\sqrt{2002}}$.

Zadanie 17. Wykazać, że zachodzą następujące nierówności

a) $\frac{1}{15} < \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100} < \frac{1}{10}$,

b) $\left(1+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{8}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{15}\right)\cdots\left(1+\frac{2}{n^2+2n}\right) < 2$,

c) $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1+\frac{2}{n^2+3n}\right) < 3$,

d) $\frac{1}{2} \le \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4}$,

e) $1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} < 2$.

Zadanie 18. a) Wykazać, że wartość sumy $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ rośnie nieograniczenie wraz ze wzrostem liczby n.

b) Niech A_n oznacza zbiór dodatnich liczb całkowitych nie większych od n i nie zawierających cyfry dziewięć w zapisie dziesiętnym. Wykazać, że suma odwrotności liczb zbioru A_n jest mniejsza od 80.

Zadanie 19. Wyznaczyć część całkowitą liczby $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}$.

Zadanie 20. Rozwiązać w liczbach całkowitych równania:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$,

b) $x^3 = 2y^3 + 4z^3$,

c) $1! + 2! + \cdots + n! = y^z$,

d) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots + \sqrt{x}}}} = z$, gdzie lewa strona równania składa się z n pierwiastków.

Zadanie 21. Wykazać, że dla dowolnej dodatniej liczby wymiernej d istnieją dodatnie liczby całkowite a, b, c, d takie, że $d = \frac{a^3+b^3}{c^3+d^3}$.

Zadanie 22. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, które są podzielne przez każdą liczbę naturalną $k \le \sqrt{n}$.

Zadanie 23. Wykazać, że jeśli k jest liczbą nieparzystą, to dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $1^k + 2^k + \cdots + n^k$ jest podzielna przez $1 + 2 + \cdots + n$.

Zadanie 24. Wykazać, że dla dowolnych liczb naturalnych $m < n$ liczba $\frac{(m,n)}{n}\binom{n}{m}$ jest całkowita.
Uwaga Symbol (m, n) oznacza największy wspólny dzielnik liczb m i n, zaś $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Zadanie 25. Niech liczby rzeczywiste a, b spełniają równości: $a^3 - 3ab^2 = 29$ oraz $b^3 - 3a^2b = 34$. Obliczyć $a^2 + b^2$.

Zadanie 26. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y takich, że $|x| \le 1, |y| \le 1$ zachodzi nierówność:

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} \le 2\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}.$$