Seria na listopad 2002 (grupa "MŁODSZYCH")

Zadanie 1. Wykazać, że równanie
$$17x^2 + 95xy + 2000y^2 = 2005$$
nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych x i y.

Zadanie 2. Niech $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ będzie dowolną permutacją zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Udowodnić, że
a) $| a_1 - 1 | + | a_2 - 2 | + \cdots + | a_n - n |$ jest liczbą parzystą.
b) dla dowolnej liczby pierwszej p liczba $(a_1 - 1)^p + (a_2 - 2)^p + \cdots + (a_n - n)^p$ jest podzielna przez p.

Zadanie 3. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność
$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[8]{8} \ldots \sqrt[2^n]{2^n} < 4$$

Zadanie 4. Dla jakich wartości n, liczba $n!$ jest podzielna przez $1 + 2 + \cdots + n$?

Zadanie 5. Niech α_n oznacza najbliższą liczbę całkowitą liczbie $\sqrt{n}$ (np. $\alpha_2 = 1, \alpha_3 = 2, \alpha_{10} = 3$). Obliczyć sumę
$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_{2002}}.$$

Zadanie 6. Punkt E podstawy AB trapezu $ABCD$ jest taki, że trójkąty AED, ECD i EBC mają takie same obwody. Udowodnić, że $AB = 2 \cdot CD$.

Zadanie 7. Ośmiokąt $ABCDEFGH$ ma wszystkie kąty równe, a długości jego boków są liczbami całkowitymi. Udowodnić, że przeciwległe boki tego ośmiokąta mają równe długości.

Zadanie 8. Wewnątrz czworokąta $ABCD$ znajduje się punkt M taki, że $ABMD$ jest równoległobokiem. Wykazać, że jeśli $\angle CBM = \angle CDM$, to $\angle ACD = \angle BCM$.

Zadanie 9. Punkty M i P są odpowiednio środkami boków BC i CD czworokąta wypukłego $ABCD$. Wykazać, że jeśli $AM + AP = a$, to pole czworokąta $ABCD$ jest mniejsze niż $a^2/2$.

Zadanie 10. Na okręgu o dane są punkty A, B, M i N. Z punktu M poprowadzono cięciwy MA_1 i MB_1 prostopadłe odpowiednio do prostych NB i NA. Wykazać, że proste AA_1 i BB_1 są równoległe.

Zadanie 11. Wielomian $w(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ ma współczynniki całkowite. Wykazać, że jeśli $w(5)$ dzieli się przez 2, a liczba $w(2)$ dzieli się przez 5, to liczba $w(7)$ dzieli się przez 10.

Zadanie 12. Dla danych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ wyznaczyć wszystkie układy liczb rzeczywistych $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ spełniających równanie
$$a_1\sqrt{x_1 - a_1^2} + a_2\sqrt{x_2 - a_2^2} + \cdots + a_n\sqrt{x_n - a_n^2} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{2}.$$

Zadanie 13. Dla jakich wartości $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ istnieją funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równość $f(x) + g(y) = x^3 + \alpha x^2 y + \beta x y^2 + y^3$?

Zadanie 14. Wykazać, że jeśli a, b, c są liczbami dodatnimi, to
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Zadanie 15. Wykazać, że jeśli liczby dodatnie a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta, zaś m_a, m_b oraz m_c długościami odpowiednich środkowych tego trójkąta, to
$$\frac{a}{m_a} + \frac{b}{m_b} + \frac{c}{m_c} > 3.$$
Wyznaczyć kres dolny sumy $\frac{a}{m_a} + \frac{b}{m_b} + \frac{c}{m_c}$.